

## СЪПОСТАВЯНЕ НЕЛИНЕЙНОСТТА НА ТИПИЧНИ СТРУКТУРИ НА ИЗМЕРИТЕЛНИ УРЕДИ

Георги Радулов<sup>1</sup>, Георги Трапов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

**РЕЗЮМЕ.** Линеината зависимост между измерваната величина и изходния сигнал на измервателния уред (датчика) е задължително условие при съвременните системи за автоматично управление. Но редица измервателни преобразуватели, явяващи се съставна част на измервателните уреди, имат нелинейна функция на преобразуването. Това влияе върху линеиността на характеристиката на уреда. Влиянието е различно при различните структурни схеми на измервателните уреди. В доклада теоретично е изследвано влиянието на нелинеен преобразувател, включен в измервателната верига на измерителен уред, в зависимост от структурната схема на уреда. Разгледани са три типични структури на уреди, които, в различни комбинации, включват цялото разнообразие от измерителни уреди. Съпоставени са абсолютните грешки, които се получават при едни и същи (като нелинейност) преобразуватели, в различните структури. Получените резултати са онагледени с таблици и графики.

### JUXTAPOSITION OF NON-LINEARITY OF TYPICAL STRUCTURES OF MEASUREMENT INSTRUMENTS

Georgy Radulov<sup>1</sup>, Georgy Trapov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia, Bulgaria

**ABSTRACT.** Linear dependence between measured quantity and output signal of measurement instrument (pick-off) is obligatory condition in the contemporary automatic control systems. But a large number of measurement transducers, included in measurement instruments, have non-linear characteristic. This influences the linearity of the instrument characteristic. The influence is different for different structural diagrams of the measurement instruments. In the paper is investigated theoretically the influence of non-linear transducer included in measurement instrument depending on the structural diagram of the instrument. Three typical structures of the measurement instruments are investigated, which, in the different combinations, include all the diversity of the measurement instruments. In the paper are juxtaposed absolute errors, resulting in identical non-linear transducers included in different structures. The results are given in tables and black and white drawings.

### Въведение в проблема

Линеината зависимост между измерваната величина и изходния сигнал на измервателния уред (датчика) е задължително условие при съвременните системи за автоматично управление. В същото време редица измервателни преобразуватели, явяващи се съставна част на измервателните уреди, имат нелинейна функция на преобразуването. Това се отразява на характеристиката на линеиността на уреда. Съществуват редица похвати за линеаризиране – линеино-отсечковата апроксимация, включване последователно или паралелно на нелинейния друг преобразувател, с подходяща нелинейност, диференциално свързване на два нелинейни преобразуватели (когато това е възможно) и др. През последните години, с навлизането на микропроцесорите в измервателните уреди, линеаризирането става и по програмен път. Въпреки многообразието от методи за линеаризиране на характеристиките на измервателните уреди, използването на структурни схеми, които водят до линеини характеристики запазва своето значение. Това важи с още по-голяма сила в случаите, когато тези структури имат и други предимства (Орнатски, 1980). Това е причина да се изследват линеаризиращите свойства на типични

структурни схеми на уреди използвани в системите за автоматизация.

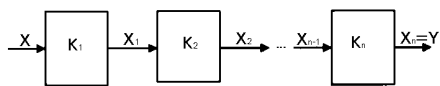
### Постановка на задачата

Структурните схеми на използваните в системите за автоматизация измерителни уреди могат се сведат до три основни, показани съответно на фиг.1, фиг.2, фиг.3.

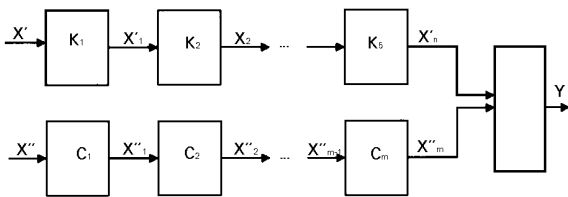
Функция на преобразуването на идеален измервателен уред с последователно свързани преобразуватели (фиг.1 )

$$\begin{aligned} X_1 &= K_1 X \\ X_2 &= K_2 \cdot X_1 = K_1 \cdot K_2 X \\ &\dots\dots\dots \\ X_i &= K_i \cdot X_{i-1} = K_1 \dots K_i X \\ &\dots\dots\dots \\ Y &= X_n = K_1 \dots K_n X \end{aligned}$$

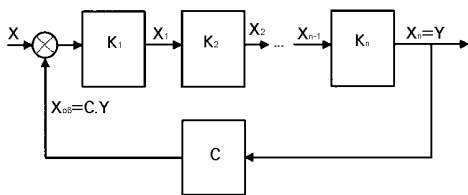
където  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$  и  $Y$  са информативните параметри на изходните сигнали на съответния преобразувател.



Фиг.1



Фиг.2



Фиг.3

Функция на преобразуването на идеален измерителен уред с паралелно-последователно свързване на преобразувателите (фиг. 2) ще се определи, като се определят най-напред  $X'_n$  и  $X''_m$ . Очевидно е от последния израз, че те ще бъдат равни на

$$X'_n = K_1 \cdot K_2 \dots K_n \cdot X'$$

$$X''_m = C_1 \cdot C_2 \dots C_m \cdot X''$$

Исходният сигнал на уреда ще бъде функция на двата сигнала  $X'_n$  и  $X''_m$

$$Y = f(X'_n, X''_m)$$

Уредите с обратна връзка обхващаща всички преобразуватели, когато не съдържат във веригата за право предаване интегриращо звено са със статично уравнивяване. Когато съдържат интегриращо звено са с астатично уравнивяване. Уредите с астатично уравнивяване са по-точни, но са по-сложни и по-инерционни. Те са намерили по-слабо приложение в системите за автоматично управление. Ето защо тук ще се спрем само на уредите с статично уравнивяване (фиг.3). Тяхната преобразователна функция се получава като се изходи от преобразователната функция на отворената верига (Орнатски, 1980, Ставракиев, 1995, Радулов, 1995).

$$Y = K_1 \cdot K_2 \dots K_n \cdot \Delta X = K_1 \cdot K_2 \dots K_n \cdot (X - X_{об})$$

където  $X_{об}$  е сигналът на обратна връзка равен на  $X_{об} = C \cdot Y$ , а  $C$  е предавателният коефициент на преобразувателя във веригата за обратна връзка (обратния преобразувател). Замествайки сигнала на обратна връзка в израза получаваме

$$Y = (X - C \cdot Y) \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_n$$

и след преобразуване

$$Y = \frac{K_1 K_2 \dots K_n}{1 + C \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_n} X$$

При положение, че е изпълнено условието  $1 \ll C \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_n$  се получава

$$Y \approx \frac{X}{C}$$

### Изследване влиянието на нелинейните преобразуватели върху характеристиката на уреда при трите структурни схеми

Дадените функции на преобразуването, както беше подчертано са на идеални уреди. В действителност измервателните уреди работят в реални условия с реални преобразуватели, които могат да бъдат, както с нелинейни преобразователни характеристики, така и да се влияят от смущаващи величини.

Да разгледаме случай когато един от преобразувателите има нелинейна характеристика  $f=f(x^2)$ . Нека това да е  $i$ -я преобразувател.

При уред с последователно свързани преобразуватели ще се получи

$$X_1 = K_1 \cdot X;$$

$$X_2 = K_2 \cdot X_1 = K_1 \cdot K_2 \cdot X$$

.....

$$X_i = K_i \cdot X_{i-1}^2 = K_i (K_1 \dots K_{i-1} \cdot X)^2.$$

Респективно исходният сигнал ще бъде равен на  $Y = K_i \dots K_n (K_1 \dots K_{i-1})^2 X^2$

Като означим с  $K = K_i \dots K_n (K_1 \dots K_{i-1})^2$  и заместим в последния израз получаваме  $Y = K \cdot X^2$

Вижда се, че характеристиката на уреда остава нелинейна.

Абсолютната грешката от нелинейност, при измерителните уреди използвани в системите за автоматично регулиране, когато линейната характеристика се явява допирателна към реалната ще бъде

$$\Delta Y = KX^2 - KX = KX(X - 1)$$

При уреди с паралелно свързани преобразуватели ще се получи същият ефект. Разбира се вторият клон може да се използва за линеаризиране на характеристиката на уреда. Но това е неоправдано, защото може да стане по-просто с цитираните в началото методи.

При включването на един нелинеен преобразувател, със същата характеристика, при уреди със статическо уравнивяване ще се получи (Радулов, 2005)

$$Y^2 - \left( \frac{1 + 2K.C.X}{K.C^2} \right) Y + \frac{X^2}{C^2} = 0$$

или  $Y$  ще бъде равно на

$$Y = \frac{1 + 2K.C.X}{2K.C^2} \pm \sqrt{\left( \frac{1 + 2K.C.X}{2K.C^2} \right)^2 - \frac{X^2}{C^2}}$$

или след преработка

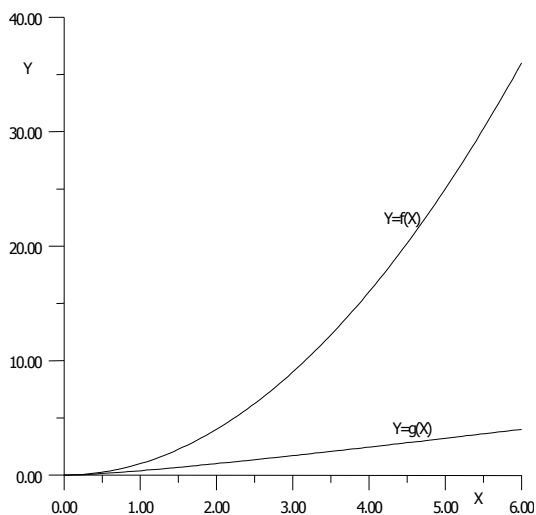
$$Y = \frac{1 + 2K.C.X}{2K.C^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4K^2.C^4} + \frac{X}{K.C^3}} \quad (a)$$

От така получения израз по-скоро може да се заключи, че характеристиката на уреда е нелинейна. Характерът на нелинейността може да се изследва, чрез числено решение и да се съпостави с характеристиката получена при същите условия по първата структурна схема. В таблица 1 са дадени резултатите получени при числено определяне на характеристиките, за двете структури, съответно при коефициент на преобразуване  $K=0,1; 1; 10; 100; 1000$ , за уредите със статично уравнивяване и  $K=1$  за уреди без обратна връзка.

Таблица 1.

X	K=0,1	K=1	K=10	K=100	K=1000	K=1, при уреди без обратна връзка
0	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0
1	0,08	0,63	0,776	0,904	0,968	1
2	0,29	1,38	1,696	1,869	1,955	4
3	0,58	2,17	2,63	2,83	2,945	9
4	0,93	3,00	3,57	3,80	3,937	16
5	1,34	3,84	4,52	4,78	4,934	25

Както и трябва да се очаква чувствителността на уредите със статично уравнивяване е много по-малка от тази на уредите с пряко предаване при една и съща стойност на коефициента на преобразуване  $K$ . Вижда се още от получените данни, че уредите със статично уравнивяване подобряват линейността на характеристиката на уреда, пак при едни и същи условия. Това става още по-ясно от фиг. 4, където са дадени характеристиките на два уреда при  $K=1$  ( $C=1$ ), съответно на уред без обратна връзка – крива  $f(x)$  и уред със статично уравнивяване – крива  $g(x)$ .

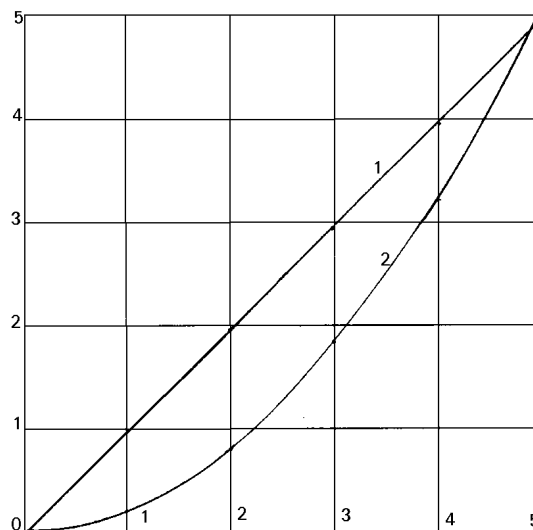


Фиг. 4.

$$f(X) = K.X^2, \quad K = 1$$

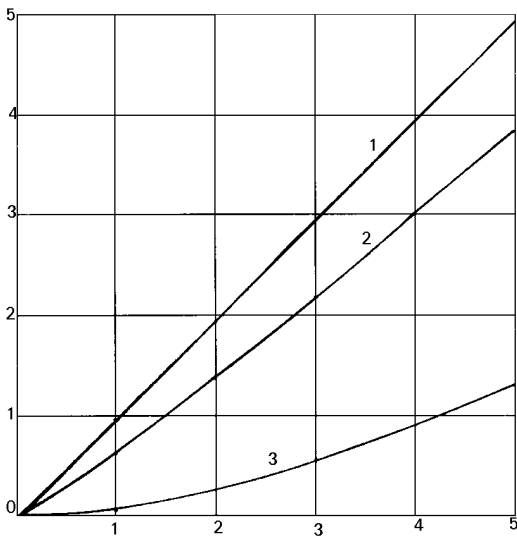
$$g(X) = \frac{1 + 2K.C.X}{2K.C^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4K^2.C^4} + \frac{X}{K.C^3}}$$

Голямата разлика в чувствителността на двата уреда пречи да се видят ясно предимствата на уредите със статично уравнивяване, по отношение линеаризиране на характеристиката на уреда. Тези предимства се подчертават от фиг.5, където са показани характеристиката на уред със статично уравнивяване – крива 1 и характеристиката на уред с право подаване на сигнала – крива 2. И двете криви са заснети при  $K=1000$ . За да има съпоставимост между двете криви, мащабът, по  $Y$ , на крива 2 е намален 5К пъти.



Фиг. 5.

С цел да се онагледят изменението на нелинейността на характеристиката на уредите със статично уравнивяване, в зависимост от стойността на К, на фиг.6 са дадени три криви заснети при различни стойности на К. Крива 1 е заснета при К=1000, крива 2 – при К=1 и крива 3 – при К=0,1.



Фиг.6

От фиг. 6 се вижда, че с нарастването на К линейността на този тип уреди се подобрява. Това се доказва лесно и аналитично. Ако е изпълнено условието  $1 \ll K.C.X$  и след съкращения се получава

$$Y^2 - \frac{2X}{C}Y - \frac{X^2}{C^2} = 0 \quad \text{или}$$

$$Y = \frac{X}{C} \pm \sqrt{\left(\frac{X}{C}\right)^2 - \left(\frac{X}{C}\right)^2} \quad \text{т.е. } Y = \frac{X}{C}$$

От уравнение (а) се вижда, че стойността на изходния сигнал Y силно зависи от C, това показва необходимостта от изследване влиянието на C върху линейността на уреда.

Да разгледаме случая когато i-я преобразувател има функция на преобразуването от вида  $X_i=f(a.x+b.x^2)$ , тогава сигналът след i-я преобразувател, за уреди без обратна връзка, ще бъде

$$X_i = a \cdot \prod_{j=1}^{i-1} K_j \cdot X + b \left( \prod_{j=1}^{i-1} K_j \cdot X \right)^2, \quad \text{като се}$$

приеме, че  $\prod_{j=1}^{i-1} K_j = K_{\Sigma 1}$  и заместим в последния

израз ще получим

$$X_i = K_{\Sigma 1} X + b K_{\Sigma 1}^2 \cdot X^2$$

Респективно за Y ще имаме

$$Y = X_i \cdot \prod_{p=i+1}^n K_p \quad \text{приемаме, че } \prod_{p=i+1}^n K_p = K_{\Sigma 2} \quad \text{или}$$

след заместване

$$Y = K_{\Sigma 2} \cdot X_i = K_{\Sigma 2} (a K_{\Sigma 1} X + b K_{\Sigma 1}^2 X^2) = a K_{\Sigma 1} K_{\Sigma 2} X + b K_{\Sigma 1}^2 K_{\Sigma 2} X^2$$

От получения израз се вижда, че характеристиката остава нелинейна и това налага включването на допълнителен линеаризиращ преобразувател.

Разгледан е и случая когато i-ят преобразувател има функция на преобразуването от вида  $X_i=f(a.x+b.x^2)$ . За Y се получава

$$Y = \frac{1 + BC + 2DCX}{2DC^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 + BC + 2DCX}{2DC^2}\right)^2 - \frac{BX + DX^2}{DC^2}}$$

Отново може да се каже, че характеристиката, в общия случай остава нелинейна.

В частния случай при приемане на условието, че  $1 \ll BC + 2DCX$ , се получава

$$Y = \frac{BC + 2DCX}{2DC^2} \pm \sqrt{\left(\frac{BC + 2DCX}{2DC^2}\right)^2 - \frac{BX + DX^2}{DC^2}} = \frac{B}{2DC} + \frac{X}{C} \pm \frac{B}{DC}$$

Следователно за Y има две решения

$$Y_1 = \frac{X}{C} + \frac{a}{b K_{\Sigma 1} \cdot C}$$

$$Y_2 = \frac{X}{C}$$

На практика това означава, че ще се получат две характеристики, които са прави линии, с еднакъв наклон,

отместени по оста Y, на разстояние  $\frac{a}{b K_{\Sigma 1} \cdot C}$ . Очевидно,

характеристиката, която не минава през началото на координатната система не е решение.

Интерес представлява и случаят, когато един от преобразувателите – i-ят, има функция на преобразуване от вида  $X_i = f(X^3)$ . Тогава за изходния сигнал, при уредите без обратна връзка, се получава

$$Y = K_i \dots K_n (K_1 \dots K_{i-1} X)^3 = K \cdot X^3$$

Аналогично за уредите със статическо уравнивяване се получава

$$Y = K_i \dots K_n (K_1 \dots K_{i-1} \Delta X)^3, \text{ т.е. } Y = K(\Delta X)^3, \text{ където е положено } K = K_i \dots K_n (K_1 \dots K_{i-1})^3.$$

Тъй като  $\Delta X = X - CY$ , то

$$Y = K(X - CY)^3.$$

/\*/

Това равенство определя неявно функционалната зависимост между променливите  $Y$  и  $X$ . Решено относно  $X$  се получава

$$X = \sqrt[3]{\frac{Y}{K}} + CY, \text{ което представлява зависимостта на } X \text{ от } Y \text{ в явен вид.}$$

Сега ще бъде получена в явен вид и зависимостта на  $Y$  от  $X$ .

След полагане  $X - CY = Z$  и преработка равенство /\*/ добива вида

$$Z^3 + \frac{1}{CK} Z - \frac{X}{CK} = 0, \text{ което ще бъде разглеждано като уравнение спрямо } Z.$$

Ако се положи  $p = \frac{1}{CK}$ ,  $q = -\frac{X}{CK}$  уравнението става  $Z^3 + pZ + q = 0$ , за решаването на което може да се приложи формулата на Кардано:

$$Z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ т.е.}$$

$$X - CY = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \text{ от}$$

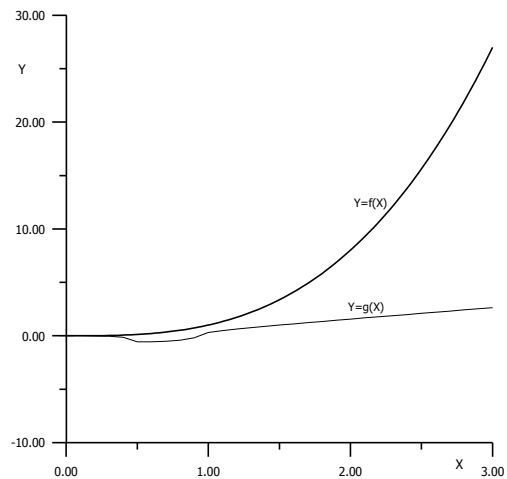
където

$$Y = \frac{X}{C} - \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = \frac{X}{C} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Като се заместят  $p$  и  $q$  с техните равни, окончателно се получава

$$Y = \frac{X}{C} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{X}{2CK} - \frac{1}{CK} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27CK}}} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{X}{2CK} + \frac{1}{CK} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27CK}}}$$

Понеже  $C > 0$ ,  $K > 0$ , то  $\Delta = \frac{X^2}{4} + \frac{1}{27CK} > 0$  и следователно уравнението има един реален и два имагинерни корена, т.е. ако се означат с  $A$  и  $B$  реалните стойности, съответно на  $\sqrt[3]{-\frac{X}{2CK} - \frac{1}{CK} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27CK}}}$  и  $\sqrt[3]{-\frac{X}{2CK} + \frac{1}{CK} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27CK}}}$ , то реалният корен на уравнението ще бъде  $Y = \frac{1}{C}(X + A + B)$ , което представлява търсената функционална зависимост.

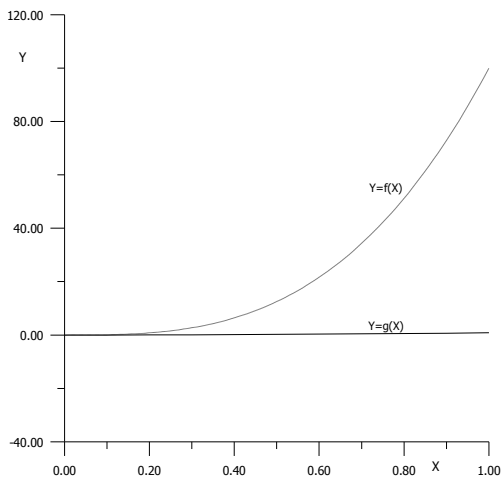


Фиг. 7.

$$f(X) = K \cdot X^3, K = 1$$

$$g(X) = \frac{X}{C} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{X}{2.C.K} - \frac{1}{C.K} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27.C.K}}} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{X}{2.C.K} + \frac{1}{C.K} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27.C.K}}}, C = 1, K = 1$$

Вижда се от фиг. 7, че характеристиката на уредите със статично уравнивяване има ясно изразен участък, където  $Y$  намалява при нарастващо  $X$ . Това е при  $K=1$ . С увеличаване на  $K$ , този участък изчезва. Това е показано на фиг. 8.



Фиг. 8.

$$f(X) = K \cdot X^3, \quad K = 100$$

$$g(X) = \frac{X}{C} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{X}{2 \cdot C \cdot K} - \frac{1}{C \cdot K} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27 \cdot C \cdot K}}} + \frac{1}{C} \sqrt[3]{-\frac{X}{2 \cdot C \cdot K} + \frac{1}{C \cdot K} \sqrt{\frac{X^2}{4} + \frac{1}{27 \cdot C \cdot K}}}, \quad C = 1, K = 100$$

Увеличаването на линейността на характеристиката с нарастването на  $K$  се доказва и аналитично. За частният случай при  $1 \ll K$ , се получава следния израз

$$Y = K_i \dots K_n (K_1 \dots K_{i-1} \Delta X)^3 = K \cdot X^3 - KX^2CY + KXC^2Y^2 - KC^3Y^3$$

Прехвърляйки членовете съдържащи  $Y$  от ляво на равенството и приемайки, че  $1 \ll K$ , получаваме

$$(X - CY)^3 = 0, \quad \text{от където следва, че } Y = \frac{X}{C}, \quad \text{т.е.}$$

характеристиката на уреда остава линейна.

## Изводи

В заключение може да се каже, че само в уредите работещи по метода на статическо уравнивяване, при определени условия се получава компенсиране на нелинейността на преобразувателите включени във

веригата за право предаване на сигнала. Това се вижда от получените графики. За другите две структури нелинейността може да се компенсира по други методи. Напоследък се използва най-вече програмно линеаризиране.

Получените аналитични изрази показват, че в случаите, когато във веригата за право предаване на сигнала, при уредите със статическо уравнивяване, е включен нелинеен преобразувател, то коефициента  $C$  (вж. израз (а)) има самостоятелно значение за линейността на уреда. Целесъобразно е това да се изследва.

Необходимо е също така да се изследва пропадането на преобразователната характеристика на уреда в началото на координатната система, когато е включен преобразувател, при който изходният сигнал зависи в трета степен от входния. Разбира се този случай има повече теоретично значение, тъй като такива преобразуватели се срещат рядко в практиката.

## Литература

- Мейзда, Ф. Электронные измерительные приборы и методы измерения, Москва, "Мир", 1990.
- Нейков, А.Н., Д.А.Самоковлийски, Ж.А.Ставракев. Лабораторни упражнения по автоматични измервателни уреди (аналогови). С., 1987.
- Нейков, А.Н., Ж.А.Ставракев. Семинарни упражнения по автоматични измервателни уреди – аналогови. С., 1991.
- Радулов. Г. Методи и средства за измерване и контрол. С., 1995.
- Радулов. Г. Изследване влиянието на нелинейността на преобразувателите при измерителните уреди със статическо уравнивяване. Предложена за печат, 2005.
- Орнатский. П.П. Автоматические измерения и приборы. Киев, "Вища школа", 1980.
- Ставракев, Ж.Ан. Автоматични измервателни уреди (аналогови). С., 1995.
- Ставракев, Ж., В. Туренков. Электрически измервателни преобразуватели, уреди и устройства. С., "Техника", 1984.
- Туричин, А.М., П.В.Новицкий, Е.С.Левшина и др. Электрические измерения неэлектрических величин. Ленинград, "Энергия", 1975.

Препоръчана за публикуване от Катедра "Автоматизация на минното производство", МЕМФ