Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски"
Годишник, том 47, свитък I, Геология и геофизика, София, 2004, стр. 9-14

ИЗБОР НА ГЕОСТАТИСТИЧЕСКИ МОДЕЛ ПРИ ПРЕСМЯТАНЕТО НА ЗАПАСИ НА МИНЕРАЛНИ РЕСУРСИ

С. Бакърджиев
Минно-геоложки университет "Св. Иван Рилски", 1700 София

РЕЗЮМЕ. Едно от главните приложения на традиционните геостатистически методи е пресмятането на запасите от полезни изкопаеми, при търсене на възможно най-подходящ модел за решение. Прилаганата за тази цел вариационна статистика има предимства като простота на сметките и зависимост на модела от един аргумент – дисперсията. При тази постановка не се отчита важна информация, която е свързана с локализацията на наблюденията. Вариационната статистика поражда геологическия парадокс: точността на пресмятане на запасите зависи единствено от броя на използваните наблюдения (проби) и не зависи от разстоянието между пробите.
Проблемът с конструирането на подходящ модел за пресмятане на запасите от полезно изкопаемо е свързан с необходимостта от избор на модел на случайно поле. Нашите числени експерименти демонстрират, че най-добрата алтернатива на случайно поле е хомогенно поле, в което известните стойности са локализирани в точно известно пространствено положение. Експериментите с реални данни от рудни находища показват, че свойствата на случайното поле на Леви са подходящи за използване. Предлаганият метод контактува с изискванията на международната квалификация на запасите и ресурсите, в частта – достоверност на пресметнатите запаси. Областта на възможното приложение е свързана с икономическите задачи за оптимизация на проучването. Новата характеристика на фракталната размерност дава необходимите стандарти за достоверност при пресмятането на запасите от полезни изкопаеми.

CHOICE THE GEOSTATISTICAL MODEL AT CALCULATION OF RESERVES OF MINERAL RESOURCES

S. Bakardjiev
University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski", 1700 Sofia

ABSTRACT. One of reasons of lagging of traditional statistical methods at calculation of ore reserves is the absence of eligible model, on which one it would be possible to receive a satisfactory solution. The applied variation statistics has advantage in simplicity of the calculations and dependence of model only from one argument - dispersion. Within the framework of this model any weighing is harmful, and localizations of observation are not essential. The variation statistics has one more essential deficiency resulting usually in a geologic paradox: any submission of outcomes of sampling as the sampling from general collection results in the deduction that the error of calculation of average depends only on an amount of samples and does not depend on spacing interval between them.
For problem solving of calculation of reserves it is necessary will construct model of a random field. Our numerical experiments demonstrate that the best alternative would be model of a homogeneous field, that locations of prospecting holes would accept known values. The experiments with substantial dataset have shown that the tendered model is steady even in a field "Levi". Method contacts of international classification of reserves of mineral raw materials. The area of a possible application of solutions obtained in the present operation enables will solve the economical tasks on optimization of exploration. The new characteristics are standards of fidelity - the mean square inaccuracy of calculation of reserves or "warranted reserves ".

Увод

В геологопроучвателната практика все повече и повече се натрупват и използват нарастващи обеми от емпирични данни. Приложението на геостатистическите методи при оценката на находищата се свеждаше до относително "поточното" пресмятане на запасите от полезни изкопаеми в зададени от изследователя блокове. Размерите на блоковете и други задавани от изследователя характеристики, определени в геостатистиката като параметри на "геометрична база" бяха основните оптимизиращи параметри, чрез които се очакваше подобрение на крайните оценки. За някаква част от изследваните обекти, този подход задоволяваше изискванията за точност, представителност и достоверност. В нарастваща степен, този, наречен още "конвенционален" геостатистически подход не можеше да бъде коректно приложен при интерполация и екстраполация на обекти, които имат фрактална природа.

Оригиналната дефиниция по Mandelbrot (1967) за фрактален обект се свежда до $N_n = \frac{C}{r_n^D}$, където N_n е броят на фрагментите, на линейната размерност r_n , C е константна на пропорционалност, а D е фракталната размерност на обекта. Фракталната размерност може да бъде цяло число, само когато тя е еквивалентна на Евклидова размерност, например едномерна, двумерна, тримерна и пр. целочислена размерност. Близки до тази размерност са очевидно рудни тела и находища на полезни изкопаеми, имащи пластообразен (не метаморфозирани находища на въглища, калиеви соли и пр.) или масивен тип форма на телата, които изграждат полезното изкопаемо. Търкот (Turcotte, 1993) отбелязва, че преобладаващата част от находищата на полезни изкопаеми имат т нар. Фрактална природа, като стойностите на D са по-близо до целочислената стойност 2, отколкото до очакваната евклидова размерност на плътните тела, равна на 3.0. Наши изследвания на други автори посочват, че за преобладаващата част от рудните находища, фракталната размерност се движи в обхвата 2,07 до 2,24. Образно казано, рудното тяло се състои от много на брой различни по размери обеми съдържащи или несъдържащи рудна минерализация. Броят на обемите, които не съдържат или съдържат минимални количества рудна минерализация е значително повече от този на обемите, които съдържат рудна минерализация. По последни данни публикувани (Chiles, J-P. and Delfiner, P., 1999, Goovaerts, P., 1997, Journel, A 2002) в специализираната научна литература, дори смятаните за относително непрекъснати находища на газов кондензат и нефт имат силно изразена фрактална (фрагментна) природа.

Емпирическият смисъл на използваните геостатистически методи при оценката на фрактални обекти на находища на полезни изкопаеми би могъл да се раздели на теоретична (моделна) и рецептурна част. В настоящата статия ще се обсъжда предимно моделната част, тъй като рецептурата част, обикновено се свързва с построяването на алгоритми и програмни среди за конкретна обработка на емпирични данни. В много от случаите рецептурните схеми са силно различаващи се за отделните находища на полезни изкопаеми.

Генерализация на проблема

Разглеждаме квадратен блок W в рудното тяло Ω, който трябва да бъде оценен от една проба в центъра w_1 и една проба от границата на блока w_2. Виртуалната проба е $w_s = |w_1; w_2|$.

Може да пресметнем средното за блока μ_W чрез средното на стойностите на пробите x_1 и x_2:

$$\hat{\mu}_W = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Евентуалната грешка е може да се оцени чрез дисперсията на оценяване:

$$\sigma_E^2(w_s \text{ to } W) = 2\bar{\gamma}(w_s;W) - \bar{\gamma}(w_s;w_s) - \bar{\gamma}(W;W).$$

Естествено, пробата в центъра w_1 дава повече информация за стойността на блока от намиращата се на известно разстояние проба w_2. По тази причина при изчисляването на W трябва да даваме по голямо тегло на w_1.

Въобще, при изчисляване на блок W от множинство от n проби w_s, където:

$$w_s = |w_1; w_2; ...w_n|,$$

най-добра оценка на μ_W може да получим ако дадем различни тегла на стойностите на пробите, зависещи от размера и позицията на пробите. Някои желателни свойства на такава оценка $\hat{\mu}_W$ са:

Ще бъде линейна функция от стойността на пробите x_i:

$$\hat{\mu}_W = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

където b_i = теглото дадено на проба x_i.

Ще бъде неизместена, тоест очакваната и стойност ще бъде равна на истинската стойност на блока:

$$E[\hat{\mu}_W - \mu_W] = 0.$$

по условие, средно квадратичната грешка на сметката ще бъде минимална:

$$E[(\hat{\mu}_W - \mu_W)^2] = \rightarrow \min.$$

Оценката която изпълнява тези свойства е очевидно с минимална дисперсия, линейна и независима оценка и е известна като кригинг оценка. Свързаната с нея грешка на пресмятанията е кригинг грешка. Тази оценка се нарича още най-добра линейна неизместена оценка. μ_K - Кригинг оценка или:

$$\sigma_K^2 = \sigma_K^2(w_s \text{ to W})$$ - Кригинг грешка.

Кригинг с неизвестно средно

Нека блок от руда W трябва да бъде оценен като се използват n проби $w_i(i = 1,2...n)$ със известна стойност x_i. Прието е, че средното μ на рудното тяло е неизвестно, тъй като границите на рудното тяло и отделни негови части са неясни или зависят от предварително зададени кондиции. Това е ситуация често срещана в медно порфирните находища. В отделни случаи (например, в Южно Африканските златни мини) поради продължителната експлоатация и натрупан огромен емпиричен материал е възможно да приемем, че μ е известно.

Нека w_s да е определена от пробите:

$$w_s = |w_1; w_2; ...w_n|.$$

Няма ограничение за размера на пробите, или техните позиции и ориентации относно W. Неизвестната стойност на блока е μ_{W}. По дефиниция, кригинг оценката μ_K на μ_{W} има следните свойства: Линейност $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$. Отсъствие на изместеност $E[\mu_K - \mu_W] = 0$

Минимална грешка на пресмятане.

$$E[(\mu_K - \mu_W)^2] = \text{a} \rightarrow \min.$$

Съгласно конвенционалната теория за кригинга отсъствието на изместеност на оценката показва, че сумата от теглата трябва да е единица.

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1.$$

В случая е важно да се изрази системата на кригинга като функция от полувариограмата. Известно е, че грешката при пресмятане е :

$$\sigma_K^2 = E[(\mu_K - \mu_W)^2 =$$

$$= -\bar{\gamma}(W;W) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \bar{\gamma}(w_i w_j) + 2\sum_{i=1}^{n} b_i \bar{\gamma}(w_i;W).$$

За да се минимизира грешката на пресмятане, която е резултат на обект на ограничение от отсъствието на изместеност, се въвежда множителя на Лагранж λ и се дефинира функцията G както следва:

$$G(b_1;b_2;...;b_n;\lambda) = \sigma_K^2 - 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n} b_1 - 1\right).$$

Очевидно е, че кригинг теглата b_i ще са решения на следните уравнения:

$$\frac{\partial G}{\partial b_i} = 0 \quad \text{за i=1,2,...n.}$$

$$\frac{\partial \text{G}}{\lambda} = 0.$$

Тази система от n+1 уравнения, където n е броя проби, може да бъде записана по кратко както следва:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \bar{\gamma}(w_i;w_j) + \lambda = \bar{\gamma}(w_i;W) \quad \text{за i=1,2,...n.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 1$$

Това е търсената кригинг система за неизвестно средно. Като се умножат n-те уравненията по $b_i(i = 1,2,...n)$ и получените резултати се сумират се получава:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \bar{\gamma}(w_i;w_j) + \lambda = \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{\gamma}(w_i;W).$$

Следва, че за пресмятане на σ_K^2 се получава:

$$\sigma_K^2 = -\bar{\gamma}(W;W) + \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{\gamma}(w_i;W) + \lambda.$$

Естествено е това уравнение да дава общия израз на кригинг грешката при неизвестно средно. Кригинг системата и кригинг грешката могат да бъдат написани в матричен вид, както следва:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(w_1;w_1) & \bar{\gamma}(w_1;w_2) & . & . & . & \bar{\gamma}(w_1;w_n) & 1 \\ \bar{\gamma}(w_2;w_1) & \bar{\gamma}(w_2;w_2) & . & . & . & \bar{\gamma}(w_2;w_n) & 1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \bar{\gamma}(w_n;w_1) & \bar{\gamma}(w_2;w_n) & . & . & . & \bar{\gamma}(w_n;w_n) & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \\ \lambda \end{bmatrix} \qquad \text{C} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}(w_1;W) \\ \bar{\gamma}(w_2;W) \\ . \\ . \\ . \\ \bar{\gamma}(w_n;W) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Тук **A** е симетрична матрица, която е функция само на стойностите на пробите и не зависи от размера на блока който ще бъде оценяван – виж Манделброт (Mandelbrot, 1967). Съобразно с това, при "обикновени" стойности на полувариограмата, матрицата ще бъде обратна A^{-1}. Опорният вектор **B** представя коефициентите $b_i(i = 1,2,...n)$ и λ. Символът B' ще бъде използван за представяне на линейният вектор от преобразуването на **B** (взето с обратен знак). **C** е опорния вектор, който е едновременно функция на пробите w_i и на блока W. Основната кригинг система се записва така: **AB=C.** Със решение: **B=A^{-1}C.** В случая, кригинг грешката се пресмята чрез следния израз: $\sigma_K^2 = -\bar{\gamma}(W;W) + B'C \cdot$

Най-съществения резултат, който се търси е - ***изразяване на основната кригинг система като функция на ковариограмата.*** Когато условията от втори ред за стационарност са изпълнени, може да се използва ковариограма. Може да се запише за дисперсията:

$$\sigma_K^2 = \bar{\sigma}(W;W) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i b_j \bar{\sigma}(w_i w_j) - 2\sum_{i=1}^{n} b_i \bar{\sigma}(w_i;W).$$

От тук за основната кригинг система при неизвестно средно се получава:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \bar{\sigma}(w_i;w_j) - \lambda = \bar{\sigma}(w_i;W) \quad \text{за i=1,2,...n.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 1$$

Кригинг грешката за неизвестно средно може да бъде записана така:

$$\sigma_K^2 = \bar{\sigma}(W;W) - \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{\sigma}(w_i;W) + \lambda ..$$

Матричният запис ще бъде:

$$A = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(w_1;w_1) & \bar{\sigma}(w_1;w_2) & . & . & . & \bar{\sigma}(w_1;w_n) & 1 \\ \bar{\sigma}(w_2;w_1) & \bar{\sigma}(w_2;w_2) & . & . & . & \bar{\sigma}(w_2;w_n) & 1 \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ . & . & & & & . & . \\ \bar{\sigma}(w_n;w_1) & \bar{\sigma}(w_2;w_n) & . & . & . & \bar{\sigma}(w_n;w_n) & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \\ -\lambda \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}(w_1;W) \\ \bar{\sigma}(w_2;W) \\ . \\ . \\ . \\ \bar{\sigma}(w_n;W) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Решението на основната кригинг система е:

B=A^{-1}C

а кригинг грешката е:

$$\sigma_K^2 = \bar{\sigma}(W;W) - B'C$$

$\bar{\sigma}(w_i;w_i)$ е дисперсията на проба w_i в Ω, $\bar{\sigma}(w_i;w_j)$ за $i \neq j$ е ковариацията между проба w_i и проба w_j, и n*n матрицата в горната лява страна на А е проба-към-проба авто-ковариационна матрица. Също, $\bar{\sigma}(w_i;W)$ е ковариацията между проба w_i и блока W, и първите n линии на вектора С от проба-към-блок. И последно, $\bar{\sigma}(W;W)$ е дисперсията на истинските стойности на W в Ω.

Модификация в кригинг методологията

За интерполация (ограничена екстраполация) Матерон, (Matheron, 1971), Джърнел и Нюбрекс (Journel, A. G. and Huijbregts, C. 1978) показват, че най-добра линейна и неизместена оценка е възможно да се получи чрез изчислителна процедура в полето $Z(x)$ отнесено към измерени стойности $Z(x_i)$ може да се представи във следната форма: $Z^*(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i)$, където теглата λ_i се пресмятат така, че да се достигне споменатата най-добра линейна и неизместена оценка. Това поражда следната система от уравнения:

$$\sum_{j=1}^{1} \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu = \gamma(x_i, x) \quad (i = 1,2,...,n) \text{ - “A”}$$

$\sum_{j=1}^{1} \lambda_j = 1$, където λ е параметърът на Лагранж, а γ е полувариограмата, която се определя като:

$$\gamma(x_i, x_j) = \frac{1}{2}\{| Z(x_i) - Z(X_j|^2\}.$$

Нека да предположим, че $Z(x_i)$ е дробно Брауново движение с експонента H, която е единствено известна в двата края на интервала $[0, L]$. Замествайки в “А” се получава:

$$\lambda_2 \gamma(0,L) + \mu = \gamma(0,x)$$

$$\lambda_1 \gamma(0,L) + \mu = \gamma(L,x)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

При условие, че $Z(0) = 0$ окончателно получаваме:

$$\gamma(x_i, x_j) = \frac{1}{2}\sigma^2 | x_i - x_j |^{2H},$$

като този израз може лесно да се реши като интерполационна – екстраполационна формула:

$$Z^*(x) = Z(L)\{\frac{1}{2}[1 - |1-\xi|^{2H} + \xi^{2H}]\} = Z(L)Q(\xi)$$

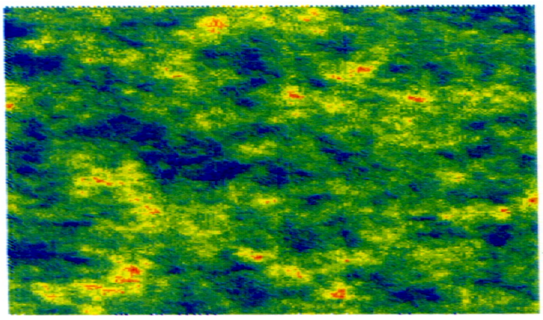
Тук $\xi = x/L$., а $Q(\xi)$ е интерполационно - екстраполационна функция, която зависи от независимата променлива X_i и стойността на константата H. Идеята за подобен вид интерполатори се дават от Манделброт (Mandelbrot., B. 1960). По-късно, въз основа на трудовете на Леви (Levy, P. 1925) и Хинчин (Khinchin. A. 1938) Рачев и Сен Гупта (Rachev, SenGupta, 1992) дават по-нататъшно развитие на формализма в контекста на движението на Леви. За сега, работещи варианти на този клас интерполатори са развити за 2D (2,5D) размерност. Единствено в програмната среда GOCAD е възможна 3D обработка и визуализация на собствена програма схема за симулация на Levi motion.

Емпирично изучаване

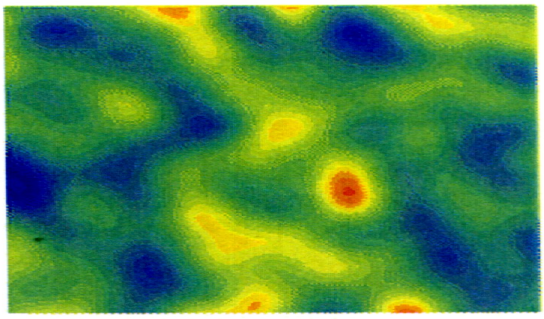
Експериментите с реални данни трябва да са предшествувани с анализи и интерпретации на изкуствени (симулационни) данни. За тази цел се взеха публикувани от

Центъра по геостатистика към минното училище във гр. Фонтебло, Франция симулационни данни.

На фиг. 1 по-горе е показана типична двумерна симулация на изотропно поле на Леви. Вижда се, че на места се срещат силно клъстеризирани области с много високи (екстремни) стойности. Не се забелязва наличие на геометрична или функционална анизотропия или тренд.

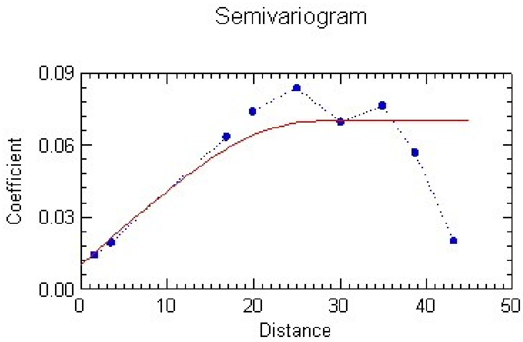


Фиг. 1. Симулация на изотропно поле на Леви



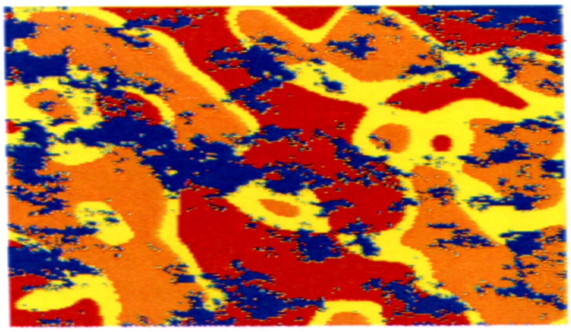
Фиг. 2. Изглаждане чрез кригинг интерполатор

На фиг. 2 е показано действието (резултатът) от приложението на конвенционалния кригинг интерполатор, който е реализиран чрез използването на серия от едномерни вариограми, получени през 30 градуса. Кригингът е реализиран чрез една, осреднена вариограма, тъй като не е установена анизотропия. Разликите във вариограмните модели не бяха съществени както по отношение на прага или съответстващия на него ранг. Ефектът на самородката за цялата фамилия от вариограми се колебаеше слабо около 0.02. Вариограмният модел представен на фиг. 3 има типично поведение на не особено силно свързани области, които се характеризират с няколко центъра на относително по-високи стойности на полето. Това е една от причината да се забелязва "ефектът на дупката", който в случая е изразен чрез намаляване на стойностите на γ след достигането на върховите стойности около $\gamma : 0.07 \div 0.077$.



Фиг. 3. Осреднена вариограма, по която е извършена кригинг интерполацията

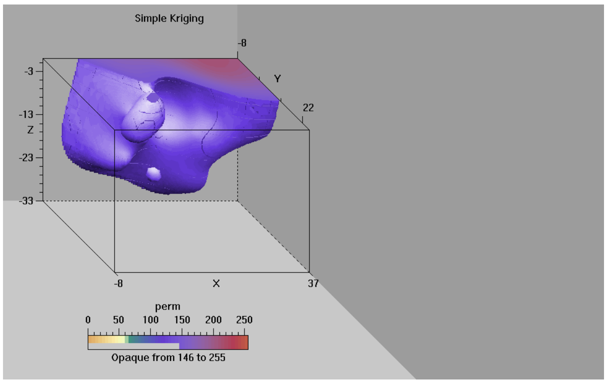
На фиг. 4 е показан резултата от модифицирания интерполатор на конвенционалния Кригинг при изчислена предварително стойност на $H \approx 0.7825$.



Фиг. 4. Кригинг чрез фрактална стохастична интерполация

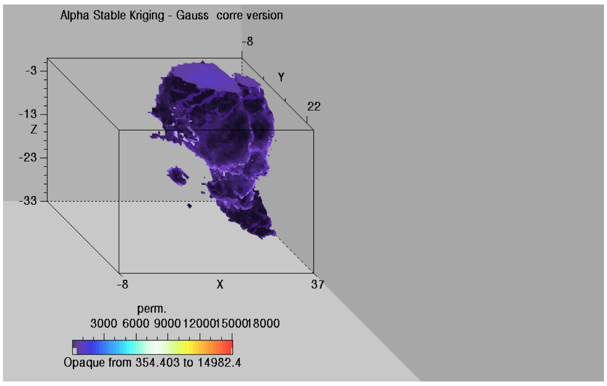
От анализа на фигурата ясно личи едновременното действието на изглаждащия ефект на конвенционалния Кригинг при съхраняването на съществуващата фракталната компонента, която реално съществува физически. От своя страна, тази супер позиция на чист кригинг и фрактално стохастична интерполация, в конкретния случай, е увеличила проекцията на евентуалните обеми, респективно запаси на полезно изкопаемо с повече от 15%.

На фиг. 5 е дадена тримерна реализация на данни на рудно находище чрез средствата на конвенционалния Кригинг, който е реализиран чрез възможностите на статистическия пакет Systat 9.0. Вариограмните модели не се представят, тъй като те са изпълнени по стандартната процедура и възможностите на пакета от приложни програми GSLIB – виж (Deutsch, C.V. and A.G. Journel, 1998). Полезната част на публикуваните програми на езика FORTAN е открития код, който дава възможността - отделните програмни модули да се модифицират според нуждите на потребителя. Това беше извършено само чрез модификацията на два от модулите и същите данни бяха обработени по вече представеният в статията модифициран алгоритъм. Резултатът е представен на фиг. 6.



Фиг. 5. Тримерна реализация на конвенционален кригинг на рудно находище

Представеният на фиг. 6 резултат демонстрира възможностите на фракталния формализъм за по-точното и безспорно по-реалистичното представяне на телата на полезните изкопаеми.



Фиг. 6. Тримерна реализация на кригинг по същите данни (фиг. 5), който е реализиран чрез фрактална стохастична интерполация

Независимо от началния етап на компютърните експерименти, които са много скъпи в изчислително време (един модел се прави дори и на мощно PC, няколко дни) перспективата за тяхното прилагане в геологопроучвателната практика е очевидно. Освен демонстрираният реализъм на изображението, с предлаганата процедура се постига по-голяма точност на пресмятане на обеми и от тук запаси от полезни изкопаеми.

Литература

Chiles, J-P. and Delfiner, P., 1999. *Geostatistics: modeling spatial uncertainty*. Wiley & Sons.

Deutsch, C.V. and A.G. Journel, 1998. *GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide*: Second Edition Oxford University Press, New York.

Goovaerts, P. 1997 *Geostatistics for Natural Resources Evaluation*. Oxford University Press, New York.

Journel, A. G. and Huijbregts, C. 1978. *Mining Geostatistics, Academic Press*.

Khinchin. A. 1938. *Limited laws for sums independed random variables*. O.N.T.I., Moscow - St. Petersburg.

Levy, P. 1925. *Calcul des probabilities*. - Paris: Gauthier-Villars et Cie, 350.

Mandelbrot., B. 1960. *The Pareto-Levy random function and the multiplicative variation of income*: Yorktown Height, N. Y.,IBM Research Center Rept.

Matheron, G. 1971. *The Theory of Regionalised Variables and its Applications*, Cahier No. 5, Centre de Morphologie Math\' e matique de Fontainebleau.

Mandelbrot, B. B. 1967. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimensional, *Science* 156, 636-8.

Rachev, SenGupta, 1992. Geometric Stable Distribution and Laplase-Weibull Mixtures. *Statistics & Decision*, 10 251-271.

Turcotte, D. L. 1993. *Fractals and chaos in geology and geophysics*, Cambridge University press.

Препоръчана за публикуване от
катедра "Геология и проучване на полезни изкопаеми, ГПФ