

ОТНОСНО СКОРОСТТА НА ПРОИЗВОЛНА ТОЧКА ОТ МОТОВИЛКАТА НА КОЛЯНО-МОТОВИЛКОВ МЕХАНИЗЪМ

Васко Тенчев

Минно-геоложки университет
"Св. Иван Рилски"
София 1700, България

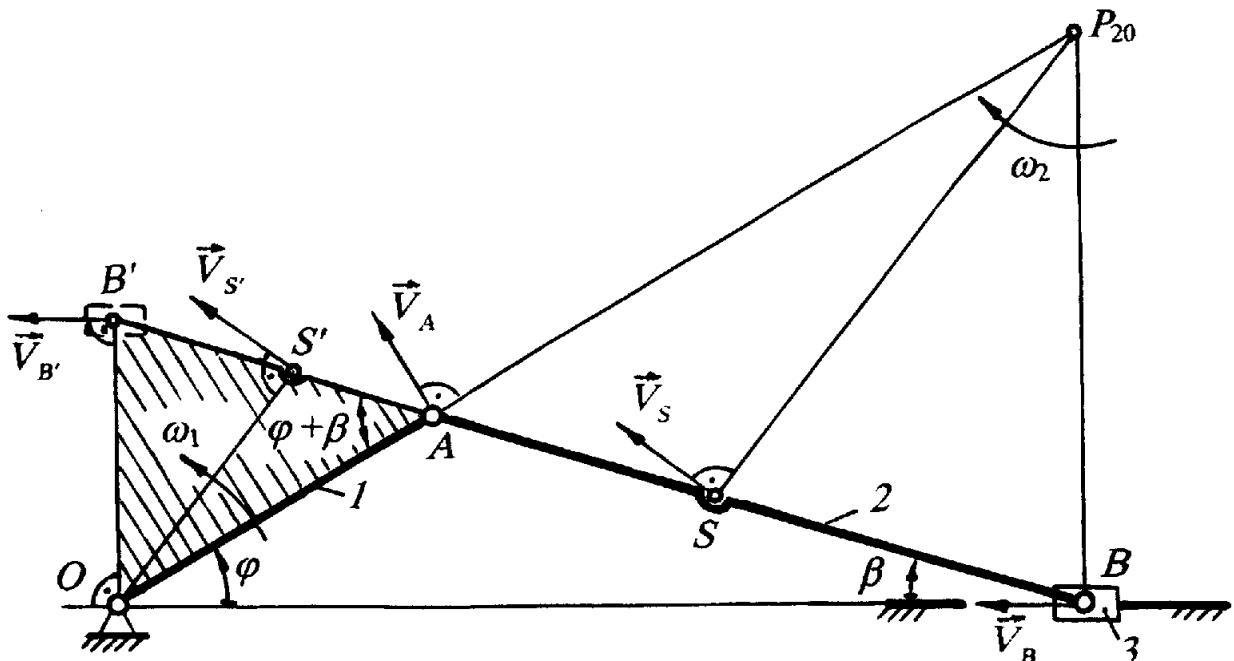
РЕЗЮМЕ

В статията се определя скоростта на произволна точка от мотовилката на коляно-мотовилков механизъм, като се използва т.нар. вторичен модел на механизма (Пиперков, 1987). За случая, когато точката е масов център на мотовилката, са синтезирани кратки формули, с които скоростта на точката се намира по-бързо. Тези формули могат да се използват при динамичното изследване на агрегати с такъв механизъм.

Определянето на скоростта на произволна точка от мотовилката на коляно-мотовилков механизъм е решена задача, която в аналитичен план води до обемисти резултати. В настоящата статия определянето на скоростта на точката се извършва чрез т.нар. *вторичен модел* на механизма, предложен от Д. Л. Пиперков (1987). С помощта на този модел могат да се синтезират кратки

формули за определяне на скоростта на точката, при условие че тя е масов център на мотовилката.

На фиг. 1 е показано произволно положение на аксиалния коляно-мотовилков механизъм OAB . За това положение се търси скоростта V_S на произволната точка S от оста на симетрия на мотовилката 2, като се използва вторичният модел OAB' на механизма.



Точката B' е пресечница на направлението на мотовилката 2 и правата, която минава през оста O на коляното 1 и е перпендикулярна на правата OB , по която се движи плъзгачът 3. Отсечката AB' се нарича образ на отсечката AB , изобразяваща мотовилката 2, а точките B' и S' - образи на съответните точки B и S от мотовилката. За всяко произволно положение на механизма е валидна зависимостта

$$\frac{AS'}{AB'} = \frac{AS}{AB} = \xi, \quad (1)$$

където ξ е известна константа.

За разглежданото положение на механизма вторичният модел OAB' представлява едно тяло (означено със застрихован триъгълник), което се върти около оста O с известната ъглова скорост ω_1 на коляното 1. В такъв случай определянето на скоростта $V_{S'}$ на образа S' не представлява проблем. Директрисата на тази скорост е перпендикулярна на отсечката OS' , а посоката ѝ съответства на посоката на ω_1 . Големината на $V_{S'}$ е

$$V_{S'} = \omega_1 \cdot OS'. \quad (2)$$

С определянето на скоростта $V_{S'}$ се определя и търсената скорост V_S на произволната точка S от мотовилката 2, тъй като се оказва, че те са равни, т.е.

$$V_S = V_{S'}. \quad (3)$$

Това твърдение се доказва, като се вземе предвид, че точката P_{20} е абсолютен моментен център на скоростите (МЦС) на мотовилката 2, и че триъгълниците ABP_{20} и OAB' са подобни. За големината на скоростта V_S може да се запише

$$V_S = \omega_2 \cdot P_{20}S, \quad (4)$$

където ъгловата скорост ω_2 на мотовилката 2, изразена чрез скоростта на точката A , е

$$\omega_2 = \frac{V_A}{P_{20}A} = \frac{\omega_1 \cdot OA}{P_{20}A} = \frac{\omega_1 \cdot OS'}{P_{20}S}. \quad (5)$$

$$V_S = V_S(\Pi) = \omega_1 \sqrt{\frac{-2 \cos^2 \Pi}{1 - \sin^2 \Pi} + 1} \cdot \cos \Pi \left\{ \cos \Pi \frac{\approx \sin^2 \Pi}{\sqrt{1 - \sin^2 \Pi}} \right\}. \quad (9)$$

За динамичното изследване на коляно-мотовилковия механизъм е важно да се знае как се изменя предавателното отношение V_S / ω_1 във функция от φ при $\omega_1 = \text{const}$, особено когато V_S е скоростта на масовия център S на мотовилката 2. Очевидно отговорът се

Тогава

$$V_S = \omega_1 \cdot OS'. \quad (6)$$

След сравняване на изразите (6) и (2) се установява, че скоростите V_S и $V_{S'}$ имат еднакви голедини. Еднаквостта на директрисите и посоките на тези скорости следва от успоредността на правите $P_{20}S$ и OS' и от посоката на ъгловите скорости ω_2 и ω_1 . С това твърдението (3) е доказано.

Построяването на вторичния модел OAB' за всяко положение на коляно-мотовилковия механизъм OAB дава възможност графично да се определи търсената скорост V_S . Същевременно този модел позволява сравнително лесно да се намери аналитичния израз на функцията $V_S = V_S(\varphi)$, където φ е геометричният параметър, който определя завъртането на коляното 1 спрямо хоризонталата откъм страната на плъзгача 3. От триъгълника OAS' с помощта на косинусовата теорема се определя отсечката OS' . Това дава възможност за големината на V_S да се запише

$$V_S = V_{S'} = \omega_1 \cdot OS' = \omega_1 \sqrt{(AS')^2 + r^2 - 2AS' \cdot r \cos(\varphi + \beta)}. \quad (7)$$

Тук за краткост е означено $r = OA$, а β е геометричният параметър, определящ завъртането на мотовилката 2 спрямо хоризонталата. По-нататък от триъгълника OAB' чрез синусовата теорема се определя

$$AB' = r \frac{\cos \varphi}{\cos \beta}. \quad (8)$$

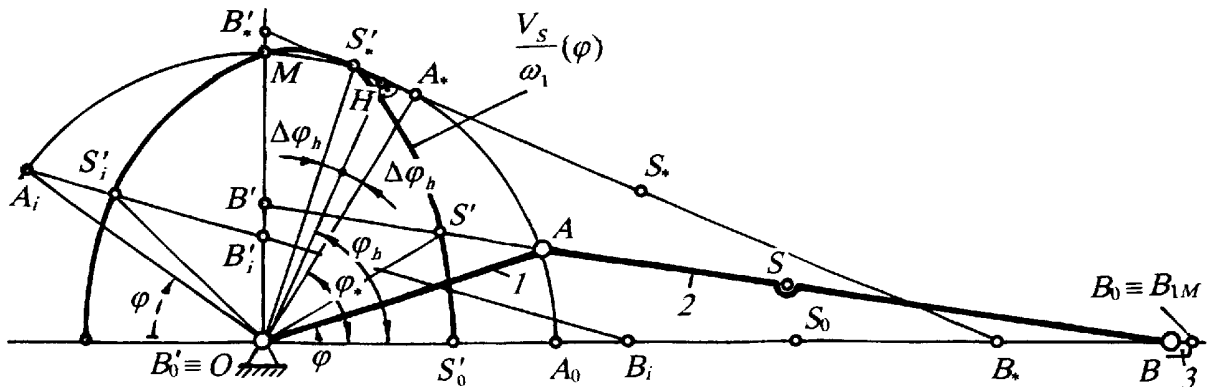
След отчитане на (1), заместване на (8) в (7) и използване на равенствата $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$ (триъгълник OAB - синусова теорема) и $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ (тук за краткост се използва означението $\lambda = r / AB$), за функцията $V_S = V_S(\varphi)$ се получава следният аналитичен израз

дава от зависимостта (9), но за практически нужди тя се оказва значително сложна. Вторичният модел OAB' позволява чрез отсечката OS' да се види лесно характерът на изменение на тази величина, както и да се

намерят кратки аналитични зависимости за нейното описание.

На фиг. 2 е показано графично изменението на предавателното отношение V_S/ω_1 за аксиалния колянно-

мотовилков механизъм AOB в интервала на φ от 0° до 180° . В интервала на φ от 180° до 360° изменението е симетрично на правата OB . Както се вижда, при $\varphi = 0$ за предавателното отношение се получава



Фигура 2

$$OS' = \frac{V_S}{\omega_1} = r - r \frac{A_0 S'_0}{A_0 B'_0} = r(1 - \xi) . \quad (10)$$

С нарастването на φ предавателното отношение V_S/ω_1 също нараства, като при един характерен ъгъл $\varphi = \varphi_*$

$$OS' = \frac{V_S}{\omega_1} = r , \quad (11)$$

след който вече

$$OS' = \frac{V_S}{\omega_1} > r . \quad (12)$$

При $\varphi = 90^\circ$ отношението V_S/ω_1 приема отново стойността (11), след което започва непрекъснато да намалява, като при $\varphi = 180^\circ$ достига първоначалната си стойност (10).

Характерният ъгъл φ_* се определя от положението OA_*B_* на колянно-мотовилковия механизъм, при което

$$OA_* = OS'_* = r . \quad (13)$$

Триъгълникът $OA_*S'_*$ е равностранен и височината му OH с ъглова координата φ_h разделя централния ъгъл $A_*OS'_*$ на два равни ъгъла $\Delta\varphi_h$. Тогава за характерния ъгъл φ_* може да се запише

$$\varphi_* = \varphi_h - \Delta\varphi_h . \quad (14)$$

По-нататък точката S се разглежда като масов център на мотовилката 2. За колянно-мотовилковия механизъм OAB

най-често $\lambda = OA/AB < 1/3$, а за разположението на масовия център S е валидно условието $\xi = AS/AB < 1/2$. При тези ограничения с достатъчна точност може да се приеме, че

$$\varphi_h \approx \arctan \frac{A_*B_*}{OA_*} = \arctan \frac{1}{\lambda} \quad (15)$$

и

$$\frac{2\Delta\varphi_h}{90^\circ - \varphi_*} = \frac{\overset{\circ}{A_*S'_*}}{A_*M} \approx \frac{A_*S'_*}{A_*B'_*} = \xi , \quad (16)$$

откъдето

$$\Delta\varphi_h \approx \frac{\xi}{2} (90^\circ - \varphi_h) . \quad (17)$$

След заместване на (15) и (17) в (14), за характерния ъгъл φ_* се получава

$$\varphi_* \approx \frac{2 \arctan \frac{1}{\lambda} - 90^\circ \xi}{2 - \xi} . \quad (18)$$

Изменението на предавателното отношение V_S/ω_1 в интервала на φ от 0° до 180° , което графично е показано на фиг. 2, може да се опише приближено по участъци с помощта на кратки тригонометрични зависимости. Тези зависимости очевидно трябва да приемат посочените стойности на V_S/ω_1 за $\varphi = 0^\circ, \varphi_*, 90^\circ, 180^\circ$, както и за граничния случай $\lambda = \xi = 0$, при който от (9) се вижда, че $V_S/\omega_1 = r$. На базата на тези изисквания и спазването на димензионното съответствие, както и на редица числени експерименти, целящи

постигането на определена относителна грешка, са синтезирани сравнително кратки тригонометрични зависимости, дадени в табл. 1.

Когато геометричният параметър φ на коляното 1 се отчита от хоризонталата, която спрямо оста O е на срещуположната страна на плъзгача 3 (на фиг. 2 параметърът φ за този случай е даден с прекъсната линия), графичният вид на предавателното отношение

Таблица 1

Ограничения: $\lambda \leq \frac{1}{3}$ и $\xi \leq \frac{1}{2}$	
$0 \leq \varphi \leq \varphi_* \quad \rightarrow$ $\frac{V_S}{\omega_1} \approx r \left[1 - \xi \cos^2 \left(90^\circ \frac{\varphi}{\varphi_*} \right) - 0,16\xi(2\lambda - \xi) \sin \left(180^\circ \frac{\varphi}{\varphi_*} \right) \right]$	
$\varphi_* \leq \varphi \leq 90^\circ \quad \rightarrow \quad \frac{V_S}{\omega_1} \approx r$	
$90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ \quad \rightarrow$ $\frac{V_S}{\omega_1} \approx r \left[1 - \xi \cos^2 \varphi + 0,56 \frac{180^\circ - \varphi}{90^\circ} \xi^2 (3\lambda - \xi) \sin 2\varphi \right]$	

V_S/ω_1 във функция от φ (фиг. 2) се запазва, но съобразно с новата ситуация характерният ъгъл φ_* се дава с израза

$$\varphi_* \approx 180^\circ - \frac{2 \arctan \frac{1}{\lambda} - 90^\circ \xi}{2 - \xi} \quad (19)$$

Кратките зависимости от табл. 1 за този случай също претърпяват изменение. Формула (19) и изменените зависимости се получават съответно от формула (18) и зависимостите от табл. 1, като формално φ_* се замести със $180^\circ - \varphi_*$, а φ - със $180^\circ - \varphi$.

Относителната грешка на кратките зависимости при стойности на λ в границите $1/10 \leq \lambda \leq 1/3$ и указаните стойности на ξ , достига до 2%. Тези граници на изменение на λ са най-използваните в практиката. При $\lambda = 0$ и $\xi = 1/2$ тази грешка нараства на 2,5%, но тя има повече теоретичен смисъл. Без последното събираемо в първата и третата формула от табл. 1 относителната грешка е по-голяма, но тя не превишава 6% за посочените ограничения на параметрите λ и ξ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Чрез използването на вторичния модел на коляно-мотовилковия механизъм е разгледано определянето на скоростта на произволна точка от оста на симетрия на мотовилката. Синтезирани са кратки формули за определяне на скоростта (предавателното отношение) на масовия център на мотовилката. Относителната грешка на получените резултати с тези формули (в границите на параметрите λ и ξ , в които се използва механизмът) не превишава 2%.

ЛИТЕРАТУРА

Пиперков, Д. Л. 1987. Вторично моделиране в теоретичната механика. Автореферат на дисертация за получаване на научната степен "кандидат на тех-ническите науки". С., Печатна база при ВМЕИ "В. И. Ленин".

Препоръчана за публикуване от
катедра "Механизация на мините", МЕМФ

ON THE VELOCITY OF AN OPTIONAL POINT OF CRANK MECHANISM CONNECTING ROD

Vasko Tenchev

University of Mining and Geology "St. Ivan Rilski"
Sofia 1700, Bulgaria

ABSTRACT

The paper deals with evaluation of the velocity of an optional point of crank mechanism connecting rod, by applying the so-called secondary model of the mechanism (Piperkov, 1987). Short formulae for fast evaluation of point velocity have been synthesized for the case, when the point is center of mass of the connecting rod. These formulae can be used in the dynamical study of assemblies comprising such mechanisms.

Evaluation of the velocity of optional point of crank mechanism connecting rod is an already solved problem, which as analytical solution leads to voluminous results. The velocity of the point is evaluated in the present paper by means of the so-called *secondary model* of the mechanism, proposed by D. L. Piperkov (1987). With the aid of this model short formulae could be synthesized for calculation of point

velocity concerning the case that the point is center of mass of the connecting rod.

Fig. 1 shows arbitrary position of the axial crank mechanism OAB. For this position, the velocity V_S of the arbitrary point S of the symmetry axis of the connecting rod 2 is to be found, when applying the secondary model OAB' of the mechanism.

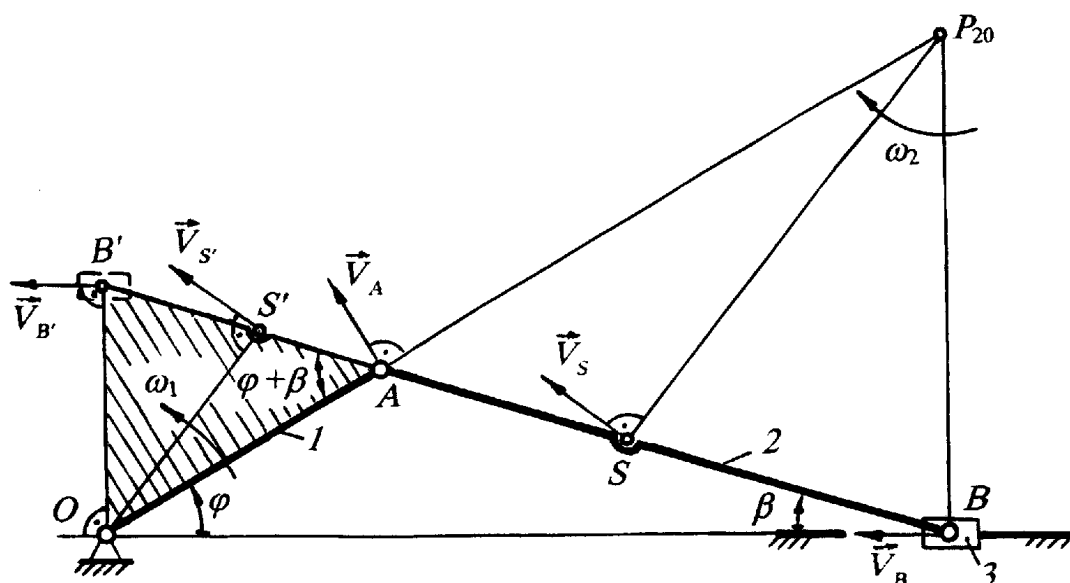


Figure 1

Point B' is intersection point of connecting rod direction 2 and the line passing through the axis O of the crank 1 and is perpendicular to the straight-line OB , which is the path of movement of slider 3. Line segment AB' is called *image* of the line segment AB , representing the connecting rod 2, and points B' and S' - *images* of the corresponding points B and S from the connecting rod. For each arbitrary position of the mechanism the relationship (1) is valid:

$$\frac{AS'}{AB'} = \frac{AS}{AB} = \xi, \quad (1)$$

where ξ is a known constant.

In the considered position of the mechanism the secondary model OAB' represents a body (designated by shaded triangle), which rotates around the axis O with the known rotational speed ω_1 of the crank 1. In this case there is no problem to evaluate the velocity $V_{S'}$ of image S' . The directrix

of this velocity is perpendicular to the line segment OS' , and its direction corresponds to the direction of ω_1 . The magnitude of $V_{S'}$ is

$$V_{S'} = \omega_1 \cdot OS' . \quad (2)$$

With the evaluation of $V_{S'}$ the searched velocity V_S of the optional point S from the connecting rod 2 is also evaluated, because it comes out, that they are equal, i. e.

$$V_S = V_{S'} . \quad (3)$$

This statement can be proved, having in view, that the point P_{20} is the absolute instantaneous velocity center (IVC) for the connecting rod 2 , and that triangles ABP_{20} and OAB' are similar. For the magnitude of the velocity V_S can be declared

$$V_S = \omega_2 \cdot P_{20}S , \quad (4)$$

where the rotational speed ω_2 of the connecting rod 2 , expressed by the velocity of point A , is

$$\omega_2 = \frac{V_A}{P_{20}A} = \frac{\omega_1 \cdot OA}{P_{20}A} = \frac{\omega_1 \cdot OS'}{P_{20}S} . \quad (5)$$

Then

$$V_S = \omega_1 \cdot OS' . \quad (6)$$

After comparison of the expressions (6) and (2) is established, that velocities V_S and $V_{S'}$ have equal magnitudes. The equivalence of directress and directions of these velocities follows from the parallelism of straight lines $P_{20}S$ and OS' , and from the direction of rotational speeds ω_2 and ω_1 . By this means the statement (3) has been proved.

$$V_S = V_S(\varphi) = r\omega_1 \sqrt{\frac{\xi^2 \cos^2 \varphi}{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} + 1 - 2\xi \cos \varphi \left(\cos \varphi - \frac{\lambda \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right)} . \quad (9)$$

It is important for the dynamical study of crank mechanism that we know how does proceed the variation of the gear ratio V_S/ω_1 as a function of φ at $\omega_1 = \text{const}$, particularly when V_S is the velocity of the mass center S of the connecting rod 2 . Obviously, the answer is in the relationship (9), but for the requirements of practice it appears to be too complicated. The secondary model OAB' gives us the possibility to use the line segment OS' to notice easily the nature of change of this

Creation of secondary model OAB' for each position of the crank mechanism OAB gives the possibility for graphic evaluation of the investigated velocity V_S . At the same time, this model permits a relatively easy way for determining the analytical expression of the function $V_S = V_S(\varphi)$, where φ is geometrical parameter, defining the rotation of the crank 1 related to the horizontal line in the side of slider 3 . Using triangle OAS' , with the aid of the theorem of cosines, the line segment OS' is defined. This gives us the possibility to write down for the velocity V_S the following expression

$$V_S = V_{S'} = \omega_1 \cdot OS' = \omega_1 \sqrt{(AS')^2 + r^2 - 2AS' \cdot r \cos(\varphi + \beta)} . \quad (7)$$

Here for briefness is nominated $r = OA$, and β is the geometrical parameter, defining the rotation of connecting rod 2 against the horizontal line. Further, using the theorem of sines, from the triangle OAB' we determine

$$AB' = r \frac{\cos \varphi}{\cos \beta} . \quad (8)$$

Taking into consideration (1), after substituting (8) in (7), and using the equations $\sin \beta = \lambda \sin \varphi$ (triangle OAB - theorem of sines) and $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ (for briefness here is nominated $\lambda = r/AB$), then for the function $V_S = V_S(\varphi)$ we obtain the following analytical expression

quantity, as well as to find short analytical relationships for its description.

In fig. 2 is presented graphically the variation of the gear ratio V_S/ω_1 for the axial crank mechanism AOB , when φ varies from 0° to 180° . In the interval of change of φ from 180° to 360° , the variation is symmetrical to the straight line OB . As it can be seen, at $\varphi = 0$ for the gear ratio could be obtained

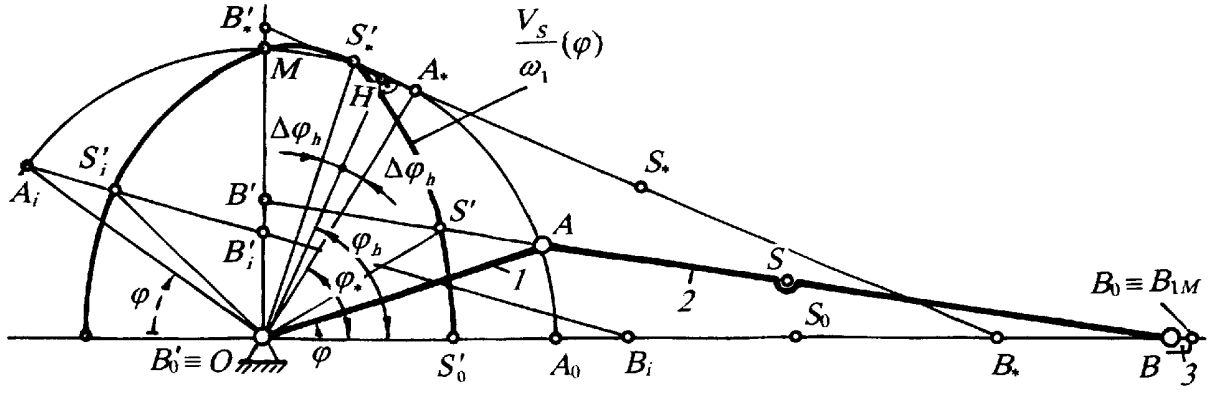


Figure 2

$$OS' = \frac{V_S}{\omega_1} = r - r \frac{A_0 S'_0}{A_0 B'_0} = r(1 - \xi). \quad (10)$$

$$\varphi_h \approx \arctan \frac{A_i B_*}{OA_*} = \arctan \frac{1}{\lambda} \quad (15)$$

The increase of φ leads to increment of the gear ratio V_S / ω_1 too. For one characteristic angle $\varphi = \varphi_*$

$$OS' = \frac{V_S}{\omega_1} = r, \quad (11)$$

and

$$\frac{2\Delta\varphi_h}{90^\circ - \varphi_*} = \frac{\overset{\circ}{A_i S'_i}}{\overset{\circ}{A_i M}} \approx \frac{A_i S'_i}{A_i B'_i} = \xi, \quad (16)$$

and after that

from there

$$OS' = \frac{V_S}{\omega_1} > r. \quad (12)$$

$$\Delta\varphi_h \approx \frac{\xi}{2}(90^\circ - \varphi_h). \quad (17)$$

At $\varphi = 90^\circ$ the ratio V_S / ω_1 arrives at the value (11) again, after that it begins continuously to decrease, until it reaches at $\varphi = 180^\circ$ its initial magnitude (10).

After substitution of (15) and (17) in (14), for the characteristic angle φ_* is obtained

The characteristic angle φ_* is determined by the position OA_*B_* of the crank mechanism, where

$$\varphi_* \approx \frac{2\arctan \frac{1}{\lambda} - 90^\circ \xi}{2 - \xi}. \quad (18)$$

$$OA_* = OS'_i = r. \quad (13)$$

The triangle $OA_*S'_i$ is isosceles and its height OH with angular coordinate φ_h divides the central angle $A_*OS'_i$ to two equal angles $\Delta\varphi_h$. Then for the characteristic angle φ_* can be written

$$\varphi_* = \varphi_h - \Delta\varphi_h. \quad (14)$$

The variation of the gear ratio V_S / ω_1 in the interval of φ from 0° to 180° , which is graphically shown in fig. 2, can be described approximately in the sections with the aid of short trigonometrical relationships. Obviously these relationships should obtain the mentioned values of V_S / ω_1 for $\varphi = 0^\circ, \varphi_*, 90^\circ, 180^\circ$, as well as for the limit case $\lambda = \xi = 0$, at which, going out from (9) it appears, that $V_S / \omega_1 = r$. On the base of these requirements and the observation of the dimensional correspondence, as well as based on a lot of numerical experiments, aiming the achievement of a specific relative error, have been synthesized reasonably short trigonometrical relationships, given in table 1.

Further the point S is regarded as mass center of the connecting rod 2. For the crank mechanism OAB very often $\lambda = OA / AB < 1/3$, and for the location of the mass center S is valid the condition $\xi = AS / AB < 1/2$. At these limitations we can assume with enough accuracy that

When the geometrical parameter φ of the crank 1 has been read from the horizontal line, which related to the axis O is situated on the opposite side of the slider 3 (in fig. 2 the parameter φ for that case is given with dash-line), the graphical form of the gear ratio

Table 1

Limitations: $\lambda \leq \frac{1}{3}$ и $\xi \leq \frac{1}{2}$	
$0 \leq \varphi \leq \varphi_*$	$\rightarrow \frac{V_S}{\omega_1} \approx r \left[1 - \xi \cos^2 \left(90^\circ \frac{\varphi}{\varphi_*} \right) - 0,16\xi(2\lambda - \xi) \sin \left(180^\circ \frac{\varphi}{\varphi_*} \right) \right]$
$\varphi_* \leq \varphi \leq 90^\circ$	$\rightarrow \frac{V_S}{\omega_1} \approx r$
$90^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$	$\rightarrow \frac{V_S}{\omega_1} \approx r \left[1 - \xi \cos^2 \varphi + 0,56 \frac{180^\circ - \varphi}{90^\circ} \xi^2 (3\lambda - \xi) \sin 2\varphi \right]$

V_S / ω_1 as a function of φ (Fig. 2) is kept the same, but according to the new situation the characteristic angle φ_* is given with the expression

$$\varphi_* \approx 180^\circ - \frac{2 \arctan \frac{1}{\lambda} - 90^\circ \xi}{2 - \xi} . \quad (19)$$

The short relationships from table 1 for this case are also subjected to changes. The formula (19) and the modified relationships are obtained correspondingly from the expression (18) and the relationships in table 1, when we substitute formally φ_* by $180^\circ - \varphi_*$, and φ by $180^\circ - \varphi$.

The relative error of the short relationships at values of λ in the limits of $1/10 \leq \lambda \leq 1/3$ and the above said values of ξ , attains the magnitude 2%. These limits of variation of λ are mostly used in practice. At $\lambda = 0$ and $\xi = 1/2$ this error increases to 2,5%, but its sense is generally theoretical. Without the last summand in the first and the third formula of table 1 the relative error is higher, but it is not higher than 6% for the specified limitations of the parameters λ и ξ .

CONCLUSION

Through the application of the secondary model of crank mechanism has been regarded the possibility of determination of the velocity of optional point from the axis of symmetry of connecting rod. Short formulae have been synthesized for the evaluation of velocity (gear ratio) of the mass center of connecting rod. The relative error of the obtained by these formulae results (in the limits of the parameters λ and ξ , where the mechanism is being used) is not higher than 2%.

REFERENCES

- Piperkov, D. L. 1987. Secondary modeling in theoretical mechanics. *Author's summary of dissertation for doctor degree "candidate of technical sciences"*. Sofia, Technical University.

