Годишник на Минно-геоложкия университет "Св. Иван Рилски"
том 44-45, свитък III, Механизация, електрификация и автоматизация на мините, София, 2002, стр. 105-108

ВЪРХУ *j*-ЛИПШИЦОВИТЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПСЕВДОМЕТРИЧНО ИЗПЪКНАЛИ РАВНОМЕРНИ ПРОСТРАНСТВА

Васил Ангелов

Минно-геоложки университет
"Св. Иван Рилски"
София 1700. България

РЕЗЮМЕ
Получени са условия гарантиращи глобална j-липшицовост на изображения в пълни псевдометрично изпъкнали равномерни пространства. Такива изображения възникват в много приложения изброени в цитираната литература.

Нека $(X,\mathbf{A})$ е едно T_2-отделимо равномерно пространство, чиято равномерност е породена от една достатъчна фамилия от псевдометрики

$$\mathbf{A} = \{d_a(x,y): a\in A\},$$

където A е индексно множество. Основните понятия отнасящи се до равномерните пространства може да се намерят в (Weil, 1938; Page, 1978). Едно равномерно пространство $(X,\mathbf{A})$ се нарича псевдометрично изпъкнало ако за всеки $x,y\in X$ съществува $z\in X(z\neq x\neq y)$ така, че

$$d_a(x,y) = d_a(x,z) + d_a(z,y)$$

за всяко $a\in A$ стига само $d_a(x,y) > 0$ cf. (Angelov, Georgiev, 1997). Метричният сегмент между x и y относно псевдометриката $d_a(.,.)$ ще означаваме с $[x,y]_a$, $a\in A$ и $(x,y)_a = [x,y]_a \setminus \{x,y\}$.

Нека $j: A\to A$ е изображение на индексното множество в себе си, чиито итерации са дефинирани индуктивно както следва

$$j^0(a) = a, j^k(a) = j(j^{k-1}(a)) \ \ (k\in N).$$

По-нататък $(X,\mathbf{A})$ и $(Y,\mathbf{A})$ ще означаваме равномерни пространства, чиито индексни множества за фамилиите от псевдометрики съвпадат, т.е.

$$(X,\{d_a(x,y): a\in A\}),(Y,\{d_a(x,y): a\in A\}).$$

Нека $\{M_a\}_{a\in A}$ е фамилия от положителни константи със същото индексно множество A. Едно изображение $T: X\to Y$ се нарича j – липшицово ако за всеки $x,y\in X$ е удовлетворено неравенството

$$d_a(Tx,Ty) \leq M_a d_{j(a)}(x,y) \text{ при } a\in A.$$

Основната цел на настоящата статия е да формулира локални условия, от които следва j – липшицовост на изображения, дефинирани в пълни псевдометрично изпъкнали равномерни пространства. Такива изображения възникват при операторни формулировки на задачи за функционално-диференциални уравнения, разглеждани в (Angelov, 1987; Angelov, 2000).

Преди да формулираме основните резултати ние ще представим един пример на псевдометрично изпъкнало равномерно пространство. Наистина, нека разгледаме множеството $C(R^1)$, състоящо се от всички непрекъснати функции $f: R^1\to R^1$. Нека фиксираме една произволна функция $b(.)\in C(R^1)$. Ще предполагаме, че $b(t)$ е неограничена и положителна върху R^1. Дефинираме множеството $C_b(R^1) = \{f\in C(R^1): |f(t)|\leq b(t)\}$. Лесно се вижда, че сумата от две функции от $C_b(R^1)$ не принадлежи на $C_b(R^1)$ в общия случай. Това означава, че $C_b(R^1)$ не е нито Банахово пространство нито линейно топологично пространство. Означаваме с A фамилията от всички компактни интервали $a=[p,q]\subset R^1$ и въвеждаме фамилията от псевдометрики $\mathbf{A} = \{d_a(f,g): a\in A\}$ върху $C_b(R^1)$ където

$d_a(f,g) = \| f - g \|_a, \| f \|_a = \sup\{| f(t) | : t \in a\}$.

За всеки $f, g \in C_b(R^1)$, за които $f \neq g$, можем да дефинираме еднопараметрично семейство от функции $h_\lambda = (1-\lambda) f(t) + \lambda g(t)$, където $\lambda \in [0,1]$. За всяко фиксирано $a \in A$ имаме

$$d_a(f, h_\lambda) = \| f - (1-\lambda) f - \lambda g \|_a = \lambda d_a(f,g)$$

$$d_a(g, h_\lambda) = \| g - (1-\lambda) f - \lambda g \|_a = (1-\lambda) d_a(f,g).$$

Очевидно $d_a(f,g) = d_a(f,h_\lambda) + d_a(h_\lambda, g)$. С $[f,g]_a$ означаваме затворения метричен сегмент

$[f,g]_a = \{h_\lambda : \lambda \in [0,1]\}$,

докато с $(f,g)_a = \{h_\lambda : \lambda \in (0,1)\}$. Лесно се проверява, че от $d_a(f,g) > 0$ следва $d_a(f,h_\lambda) > 0$ и $d_a(g,h_\lambda) > 0$ при $\lambda \in (0,1)$ и обратно.

Изображението $T : X \to Y$ се нарича почти дирекционно *j*-липшицово върху X, ако за всички $x, y \in X$ с $x \neq y$ следното неравенство е в сила:

$$\inf\left[\frac{d_a(Tx,Tz)}{d_{j(a)}(x,z)} : z \in (x,y)_{j(a)}\right] \leq M_a \tag{1}$$

при $d_{j(a)}(x,y) > 0$ и $d_a(Tx,Ty) = 0$ при $d_{j(a)}(x,y) = 0$.

Горната дефиниция обобщава съответната дефиниция в метрични пространства cf. (Kirk, Ray, 1977). Когато $d_{j(a)}(x,y) = 0$ няма метричен сегмент между x и y относно $j(a)$.

Напомняме, че едно изображение $T : X \to Y$ се нарича затворено, ако за всяка редица $\{x_n\} \subset X$ от условията $\lim\limits_n x_n = x$ и $\lim\limits_n T(x_n) = y$ следва $x \in X$ и $Tx = y$.

ТЕОРЕМА. Нека $(X, \mathbf{A})$ и $(Y, \mathbf{A})$ са пълни T_2-отделими равномерни пространства като $(X, \mathbf{A})$ е псевдометрично изпъкнало. Нека $T : (X, \mathbf{A}) \to (Y, \mathbf{A})$ е почти дирекционно *j*-липшицово изображение относно фамилията $\{M_a\}_{a \in A}$. Ако T е затворено, тогава T е *j*-липшицово върху цялото пространство $(X, \mathbf{A})$.

Доказателство: Нека x и y са два различни елемента от X, т.е. $x \neq y$. Избираме нова фамилия от положителни константи $\{M'_a\}_{a \in A}$, такива, че $M'_a > M_a$ за всяко $a \in A$. С Ω ще означаваме съвкупността от изброимите ординални числа. Нека фиксираме $\gamma \in \Omega$ cf. Ch.XV, (Angelov, 1989). За всяко $\alpha \in \Omega$ по-малко от γ дефинираме множеството $\{x_\alpha\}$ така, че

(γ1) $x_0 = x$; $(\gamma 2)$ ако $x_\alpha = y$ за някое α and $\alpha \leq \eta < \gamma$, тогава $x_\eta = y$; (γ3) ако $\alpha < \beta < \eta < \gamma$ и $x_\eta \neq y$, тогава $x_\beta \in (x_\alpha, x_\eta)_{j(a)}$ за онези $a \in A$, за които $d_{j(a)}(x_\alpha, x_\eta) > 0$; (γ4) ако $\beta < \eta < \gamma$ и $x_\eta \neq y$, тогава $x_\eta \in (x_\beta, y)_{j(a)}$; (γ5) T е *j*-липшицово изображение относно фамилията $\{M'_a\}_{a \in A}$ върху множеството $\{x_\eta : \eta < \gamma\}$.

Ако γ има предшественик $\mu \in \Omega$, т.е. $\gamma = \mu + 1$, тогава полагаме $x_\gamma = y$.

Ако $x_\mu \neq y$ и $d_{j(a)}(x_\mu, y) > 0$, то предвид (1) можем да изберем $x_\gamma \in [x_\mu, y]_{j(a)}$ така, че

$$d_a(Tx_\gamma, Tx_\mu) \leq M'_a d_{j(a)}(x_\gamma, x_\mu)$$

(напомняме, че $d_{j(a)}(x_\mu, y) > 0$ дава $d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) > 0$).

В следващите редове ще покажем, че условията (γ1)-(γ3) са в сила при $\eta = \gamma$. Наистина, ако $\alpha < \mu$, тогава от (γ4) следва

$$\begin{aligned} d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) &\leq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) = \\ &= d_{j(a)}(x_\alpha, y) - d_{j(a)}(x_\mu, y) + d_{j(a)}(x_\mu, y) - d_{j(a)}(x_\gamma, y) = \\ &= d_{j(a)}(x_\alpha, y) - d_{j(a)}(x_\gamma, y) \leq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma), \end{aligned}$$

т.е., $d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma)$ или $x_\mu \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$. Ако $\alpha < \beta < \mu < \gamma$, тогава (γ3) следва

$$\begin{aligned} d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) &= d_{j(a)}(x_\alpha, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) = \\ &= d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) \geq \\ &\geq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma) \geq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma), \end{aligned}$$

т.е. $d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma)$ което означава $x_\beta \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$. Така доказахме, че (γ3) е валидно за $\eta = \gamma$.

За всяко $\beta < \gamma$ имаме

$$\begin{aligned} d_{j(a)}(x_\beta, y) &= d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, y) = \\ &= d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) + d_{j(a)}(x_\gamma, y). \\ &= d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma) + d_{j(a)}(x_\gamma, y) \end{aligned}$$

Следователно (γ4) е изпълнено при $\eta = \gamma$.

Допускаме, че $\beta < \gamma$. Както вече показахме

$x_\beta \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$ и

$$d_a(Tx_\beta, Tx_\gamma) \leq d_a(Tx_\beta, Tx_\mu) + d_a(Tx_\mu, Tx_\gamma) \leq$$
$$\leq M'_a d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + M'_a d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) = M'_a d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma)$$

с което (γ5) е доказано.

Ако $\gamma \in \Omega$ е ординално число от втори тип, то можем да изберем една растяща редица от ординални числа $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\gamma_n \in \Omega$ така, че $\lim_n \gamma_n = \gamma$. Предвид (γ1) и (γ3) имаме $d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_{n+1}}) = d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}) + d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, x_{\gamma_{n+1}})$ откъдето следва $d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_{n+1}}) \geq d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n})$, т.е. редицата $\{d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща. Понеже (γ4) дава

$$d_{j(a)}(x_0, y) = d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}) + d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, y),$$
$$d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}) = d_{j(a)}(x_0, y) - d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, y)$$

или $d_{j(a)}(x, x_{\gamma_n}) \leq d_{j(a)}(x, y)$ $(x_0 = x)$, от което следва сходимостта на редицата $\{d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n})\}_{n=1}^{\infty}$. Ако положим $x_{\gamma_0} = x$ тогава $d_{j(a)}(x, x_{\gamma_n}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_{j(a)}(x_{\gamma_k}, x_{\gamma_{k+1}})$, откъдето следва

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{j(a)}(x_{\gamma_k}, x_{\gamma_{k+1}}) \leq d_{j(a)}(x, y) < \infty .$$

Това означава, че $\{x_{\gamma_n}\}_{n=0}^{\infty}$ е редица на Коши в $(X, \mathbf{A})$. От пълнотата на X следва съществуване на елемент $z \in X$ така, че $\lim_n x_{\gamma_n} = z$. Тогава можем да положим $x_\gamma = z$.

Ако за произволно $\alpha < \gamma$ имаме $x_\alpha = y$, тогава редицата $\{x_{\gamma_n}\}$ е евентуално постоянна, т.е. всичките й елементи от известно място нататък са равни на y. В този случай (γ2) - (γ5) са изпълнени за $\eta = \gamma$.

Понеже $\gamma_n < \gamma$, то от (γ5) следва

$$d_a(Tx_{\gamma_n}, Tx_{\gamma_m}) \leq M'_a d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, x_{\gamma_m})$$

за всеки m и n. Без ограничение на общността можем да предположим, че $d_{j(a)}(x_m, x_n) > 0$, защото винаги можем да отстраним елементите на редицата $\{x_{\gamma_n}\}$, за които $d_{j(a)}(x_m, x_n) = 0$ и останалите да преномерираме. Така получаваме, че $\{Tx_{\gamma_n}\}_n$ е една редица на Коши в Y. Но Y е пълно равномерно пространство и T има затворена графика. Тогава $\lim_n Tx_{\gamma_n} = Tx_\gamma$. Нека $\alpha < \beta < \gamma$ и нека n е избрано достатъчно голямо така, че $\gamma_n \geq \beta$. Предвид (γ3) имаме

$$d_{j(a)}(x_\alpha, x_{\gamma_n}) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_{\gamma_n}) .$$

След извършване на граничен преход в горното равенство получаваме

$$d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma),$$

т.е. $x_\beta \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$. Също така от (γ4) следва

$$d_{j(a)}(x_\beta, y) = d_{j(a)}(x_\beta, x_{\gamma_n}) + d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, y)$$

и след $n \to \infty$ получаваме $x_\gamma \in (x_\beta, y)_{j(a)}$.

Следователно (γ3) и (γ4) са удовлетворени при $\eta = \gamma$. Условие (γ5) ни дава

$$d_a(Tx_\beta, Tx_{\gamma_n}) \leq M'_a d_{j(a)}(x_\beta, x_{\gamma_n})$$

(при $d_{j(a)}(x_\beta, x_{\gamma_n}) > 0$) и оттук при $n \to \infty$ имаме

$$d_a(Tx_\beta, Tx_\gamma) \leq M'_a d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma) .$$

Така получихме едно множество $\{x_\gamma : \gamma \in \Omega\}$ в X така, че (γ1) - (γ5) да са изпълнени. Ако $x_\gamma \neq y$ за всяко $\gamma \in \Omega$, тогава (γ3) ни дава, че множеството $Z = \{d_{j(a)}(x, x_\gamma) : \gamma \in \Omega\}$ е едно дискретно множество от реални числа. Предвид Теорема 2, Глава XV, (Sierpinski, 1965), множеството Z е неизброимо. Полученото противоречие показва, че за някое $\gamma \in \Omega$ имаме $x_\gamma = y$ и тогава от (γ5) следва

$$d_a(Tx, Ty) \leq M'_a d_{j(a)}(x, y) .$$

Последното неравенство е валидно за всяко $M'_a > M_a$ и следователно

$$d_a(Tx, Ty) \leq M_a d_{j(a)}(x, y) .$$

С това теоремата е доказана.

ЛИТЕРАТУРА

Weil A. 1938. Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale. Hermann, Paris.

Kelley J. L. 1959. General Topology. D. Van Nostrand Company, New York.

Isbell J. R. 1964. Uniform Spaces. AMS, Providence, RI.

Page W. 1978. Topological Uniform Structures. J. Wiley &Son, New York.

Angelov V. G. L. Georgiev. 1997. An extension of Kirk-Schöneberg theorem to uniform spaces. Discussiones Mathematicae,Differential Includeusions, v.17, 89-96.

Angelov V. G. 1987. Fixed point theorems in uniform spaces and applications. Czechoslovak Math. J., v.37, 19-33.

Angelov V. G. 1989. Fixed points of densifying mappings in locally convex spaces and applications. J. Institute of Mathematics and Computer Sci. (Calcutta), v.2, N2, 22-39.

Angelov V. G. 2000. Escape trajectories of J.L. Synge equations. J. Nonlinear Analysis. Real World Applications. V.1, 189-204.

Kirk W. A., W. O. Ray. 1977. A note on Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Canad. Math. Bull. v.20(4), 463-466.

Sierpinski W. 1965. Cardinal and Ordinal Numbers. Warszawa.

Препоръчана за публикуване от
катедра "Математика" на МЕМФ

ON *j*-LIPSCHITZIAN MAPPINGS IN PSEUDOMETRICALLY CONVEX UNIFORM SPACES

Vasil Angelov

University of Mining and Geology
"St. Ivan Rilski"
Sofia 1700
Bulgaria

SUMMARY

Conditions guaranteeing global *j*-Lipschitzicity of mappings defined in complete pseudometrically convex uniform spaces are given. Such mappings arise in many applications mentioned in the references.

Let $(X,\mathbf{A})$ be a complete T_2 -separated uniform space whose uniformity is generated by a saturated family of pseudometrics $\mathbf{A}=\{d_a(x,y): a\in A\}$, where A is an index set. Basic notions concerning the uniform spaces can be found in (Weil, 1938; Kelley, 1959; Isbell, 1964; Page, 1978). A uniform space $(X,\mathbf{A})$ is said to be pseudometrically convex if for every $x,y\in X$ there is $z\in X(z\neq x\neq y)$ such that

$$d_a(x,y)=d_a(x,z)+d_a(z,y)$$

for every $a\in A$ provided $d_a(x,y)>0$ (cf. Angelov et al., 1997). The metrical segment between *x* and *y* with respect to the pseudometric $d_a(.,.)$ we denote by $[x,y]_a$, $a\in A$ and

$$(x,y)_a=[x,y]_a\setminus\{x,y\}.$$

Let $j:A\to A$ be a map of the index set into itself whose iterates are defined inductively as follows

$$j^0(a)=a, j^k(a)=j(j^{k-1}(a)) \quad (k\in N).$$

Further on by $(X,\mathbf{A})$ and $(Y,\mathbf{A})$ we mean uniform spaces whose index sets for their families of pseudometrics coincide, i.e. we have

$$(X,\{d_a(x,y): a\in A\}),(Y,\{d_a(x,y): a\in A\}).$$

Let $\{M_a\}_{a\in A}$ be a family of positive constants where A is the same index set. A mapping $T:X\to Y$ is called *j*-Lipschitzian if for every $x,y\in X$ is satisfied

$$d_a(Tx,Ty)\leq M_a d_{j(a)}(x,y) \text{ for } a\in A.$$

The main goal of the present note is to formulate local conditions which imply the *j*-Lipschitzian character of mappings defined in complete pseudometrically convex uniform spaces. Such mappings are generated by functional differential equations treated in (Angelov, 1987; 1989, 2000).

Prior to formulate the main result we present an example of pseudometrically convex uniform space. Consider the set $C(R^1)$ of all continuous functions $f:R^1\to R^1$. Let us fix an arbitrary function $\mathrm{b}(.)\in C(R^1)$ and assume that $\mathrm{b}(t)$ is unbounded and positive on R^1. Define the set $C_{\mathrm{b}}(R^1)=\{f\in C(R^1):|f(t)|\leq b(t)\}$. It is easy to see that the sum of two functions from $C_{\mathrm{b}}(R^1)$ does not belong to $C_b(R^1)$ in general case. This means $C_{\mathrm{b}}(R^1)$ is neither a Banach space nor linear topological space. Denote by A the family of all compact intervals $a=[p,q]\subset R^1$ and introduce a family of pseudometrics $\mathbf{A}=\{d_a(f,g): a\in A\}$ on $C_{\mathrm{b}}(R^1)$ where

$$d_a(f,g)=\|f-g\|_a, \|f\|_a=\sup\{|f(t)|: t\in a\}.$$

For every $f,g\in C_b(R^1)$ with $f\neq g$ we define the functions $h_\lambda=(1-\lambda)f(t)+\lambda g(t)$, where the parameter $\lambda\in[0,1]$. For each fixed $a\in A$ we have

$$d_a(f,h_\lambda)=\|f-(1-\lambda)f-\lambda g\|_a=\lambda d_a(f,g)$$

$$d_a(g,h_\lambda)=\|g-(1-\lambda)f-\lambda g\|_a=(1-\lambda)d_a(f,g).$$

Obviously $d_a(f,g)=d_a(f,h_\lambda)+d_a(h_\lambda,g)$. So by $[f,g]_a$ we denote the closed metrical segment $[f,g]_a=\{h_\lambda:\lambda\in[0,1]\}$, while by $(f,g)_a=\{h_\lambda:\lambda\in(0,1)\}$. It is easy to verify that $d_a(f,g) > 0$ implies $d_a(f,h_\lambda) > 0$ and $d_a(g,h_\lambda) > 0$ for $\lambda \in (0,1)$ and vice versa.

The mapping $T : X \to Y$ is said to be almost directionally *j*-Lipschitzian on X if for each $x, y \in X$ with $x \neq y$ the following inequality holds:

$$\inf\left[\frac{d_a(Tx,Tz)}{d_{j(a)}(x,z)} : z \in (x,y)_{j(a)}\right] \leq M_a \qquad (1)$$

for $d_{j(a)}(x,y) > 0$ and $d_a(Tx,Ty) = 0$ for $d_{j(a)}(x,y) = 0$.

The above definition extends the corresponding notion in metric spaces (cf. Kirk et al., 1977).

For $d_{j(a)}(x,y) = 0$ there is no metrical segment between x and y with respect to $j(a)$.

Recall that a mapping $T : X \to Y$ is closed if for $\{x_n\} \subset X$ the conditions $\lim_n x_n = x$ and $\lim_n T(x_n) = y$ imply $x \in X$ and $Tx = y$.

THEOREM. Let $(X,\mathbf{A})$ and $(Y,\mathbf{A})$ be complete T_2-separated uniform spaces with $(X,\mathbf{A})$ being pseudometrically convex. Let $T : (X,\mathbf{A}) \to (Y,\mathbf{A})$ be almost directionally *j*-Lipschitzian mapping with a family of positive constants $\{M_a\}_{a\in A}$. If T is closed, then T is *j*-Lipschitzian mapping on the whole $(X,\mathbf{A})$.

Proof: Let x and y be two distinct elements of X, i.e. $x \neq y$. Let us choose a new family of positive constants $\{M'_a\}_{a\in A}$ such that $M'_a > M_a$ for every fixed $a \in A$. By Ω we denote the countable ordinals and fixed $\gamma \in \Omega$ (cf. Ch.XV, Angelov, 1987). For all $\alpha \in \Omega$ less than γ define the set $\{x_\alpha\}$ so that

(γ1) $x_0 = x$;

(γ2) if $x_\alpha = y$ for some α and $\alpha \leq \eta < \gamma$, then $x_\eta = y$;

(γ3) if $\alpha < \beta < \eta < \gamma$ and $x_\eta \neq y$, then $x_\beta \in (x_\alpha, x_\eta)_{j(a)}$ for those $a \in A$ for which $d_{j(a)}(x_\alpha, x_\eta) > 0$;

(γ4) If $\beta < \eta < \gamma$ and $x_\eta \neq y$, then $x_\eta \in (x_\beta, y)_{j(a)}$;

(γ5) T is *j*-Lipschitzian with a family $\{M'_a\}_{a\in A}$ on the set $\{x_\eta : \eta < \gamma\}$.

If γ has a predecessor $\mu \in \Omega$, that is, $\gamma = \mu + 1$, then we put $x_\gamma = y$.

If $x_\mu \neq y$ and $d_{j(a)}(x_\mu, y) > 0$ in view of the definition (1) we choose $x_\gamma \in (x_\mu, y)_{j(a)}$ so that

$$d_a(Tx_\gamma, Tx_\mu) \leq M'_a d_{j(a)}(x_\gamma, x_\mu)$$

(recall that $d_{j(a)}(x_\mu, y) > 0$ implies $d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) > 0$).

In what follows we show that (γ1)- (γ3) hold for $\eta = \gamma$. If $\alpha < \mu$, then (γ4) implies

$$d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) \leq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) =$$
$$= d_{j(a)}(x_\alpha, y) - d_{j(a)}(x_\mu, y) + d_{j(a)}(x_\mu, y) - d_{j(a)}(x_\gamma, y) =$$
$$= d_{j(a)}(x_\alpha, y) - d_{j(a)}(x_\gamma, y) \leq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma),$$

that is, $d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma)$ or $x_\mu \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$. If $\alpha < \beta < \mu < \gamma$, then ($\gamma$3) implies

$$d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) =$$
$$= d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) \geq$$
$$\geq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma) \geq d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma),$$

that is $d_{j(a)}(x_\alpha, x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha, x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma)$ which means $x_\beta \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$. So ($\gamma$3) is thus proved for $\eta = \gamma$.

For $\beta < \gamma$ we have

$$d_{j(a)}(x_\beta, y) = d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, y) =$$
$$= d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) + d_{j(a)}(x_\gamma, y).$$
$$= d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma) + d_{j(a)}(x_\gamma, y)$$

Therefore (γ4) holds for $\eta = \gamma$.

We have to show that (γ5) holds for $\eta = \gamma$.

Suppose $\beta < \gamma$. As we have already shown $x_\beta \in (x_\alpha, x_\gamma)_{j(a)}$ and

$$d_a(Tx_\beta, Tx_\gamma) \leq d_a(Tx_\beta, Tx_\mu) + d_a(Tx_\mu, Tx_\gamma) \leq$$
$$\leq M'_a d_{j(a)}(x_\beta, x_\mu) + M'_a d_{j(a)}(x_\mu, x_\gamma) = M'_a d_{j(a)}(x_\beta, x_\gamma)$$

which proves (γ5).

If $\gamma \in \Omega$ is a limit ordinal, then we can choose a increasing sequence of ordinals $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\gamma_n \in \Omega$ such that $\lim_n \gamma_n = \gamma$. In view of (γ1) and (γ3)

$$d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_{n+1}}) = d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}) + d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, x_{\gamma_{n+1}})$$

which implies $d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_{n+1}}) \geq d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n})$,
that is, the sequence $\{d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n})\}_{n=1}^{\infty}$ is non-decreasing. Since (γ4) implies

$$d_{j(a)}(x_0, y) = d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}) + d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, y),$$
$$d_{j(a)}(x_0, x_{\gamma_n}) = d_{j(a)}(x_0, y) - d_{j(a)}(x_{\gamma_n}, y)$$

or $d_{j(a)}(x,x_{\gamma_n}) \leq d_{j(a)}(x,y)$

which implies the convergence of the sequence $\{d_{j(a)}(x_0,x_{\gamma_n}\}_{n=1}^{\infty}$. If we put $x_{\gamma_0} = x$ then

$$d_{j(a)}(x,x_{\gamma_n}) = \sum_{k=0}^{n-1} d_{j(a)}(x_{\gamma_k},x_{\gamma_{k+1}}),$$

which implies

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{j(a)}(x_{\gamma_k},x_{\gamma_{k+1}}) \leq d_{j(a)}(x,y) < \infty .$$

This means that $\{x_{\gamma_n}\}_{n=0}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in $(X,\mathbf{A})$. The completeness of X implies an existence of an element $z \in X$ such that $\lim_n x_{\gamma_n} = z$. We can define $x_\gamma = z$.

If for any $\alpha < \gamma$ we have $x_\alpha = y$, then $\{x_{\gamma_n}\}$ is eventually the constant sequence {*y*}. In this case (γ2) - (γ5) are satisfied for $\eta = \gamma$.

Since $\gamma_n < \gamma$ then (γ5) implies

$$d_a(Tx_{\gamma_n},Tx_{\gamma_m}) \leq M'_a d_{j(a)}(x_{\gamma_n},x_{\gamma_m})$$

for all m and n. We can assume without loss of generality that $d_{j(a)}(x_m,x_n) > 0$. Otherwise we remove the elements for which $d_{j(a)}(x_m,x_n) = 0$ and renumber the rest ones. Consequently $\{Tx_{\gamma_n}\}_n$ is a Cauchy sequence in Y. But Y is a complete uniform space and T has a closed graph. Then $\lim_n Tx_{\gamma_n} = Tx_\gamma$. Let $\alpha < \beta < \gamma$ and let n be chosen sufficiently large such that $\gamma_n \geq \beta$. In view of (γ3) we have

$$d_{j(a)}(x_\alpha,x_{\gamma_n}) = d_{j(a)}(x_\alpha,x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta,x_{\gamma_n}).$$

Passing to the limit $n \to \infty$ in the last equality we obtain

$$d_{j(a)}(x_\alpha,x_\gamma) = d_{j(a)}(x_\alpha,x_\beta) + d_{j(a)}(x_\beta,x_\gamma),$$

that is, $x_\beta \in (x_\alpha,x_\gamma)_{j(a)}$. Also (γ4) implies

$$d_{j(a)}(x_\beta,y) = d_{j(a)}(x_\beta,x_{\gamma_n}) + d_{j(a)}(x_{\gamma_n},y)$$

and after $n \to \infty$ we obtain $x_\gamma \in (x_\beta,y)_{j(a)}$. Consequently (γ3) and (γ4) are satisfied for $\eta = \gamma$. Condition (γ5) implies

$$d_a(Tx_\beta,Tx_{\gamma_n}) \leq M'_a d_{j(a)}(x_\beta,x_{\gamma_n})$$

(provided $d_{j(a)}(x_\beta,x_{\gamma_n}) > 0$) hence by $n \to \infty$

$$d_a(Tx_\beta,Tx_\gamma) \leq M'_a d_{j(a)}(x_\beta,x_\gamma).$$

Finally we obtained a set $\{x_\gamma : \gamma \in \Omega\}$ in X so that (γ1) - (γ5) are satisfied. If $x_\gamma \neq y$ for all $\gamma \in \Omega$ then (γ3) implies that the set $Z = \{d_{j(a)}(x,x_\gamma) : \gamma \in \Omega\}$ is a discrete set of real numbers. In view of Theorem 2, Ch. XV, (Sierpinski, 1965) Z is non-denumerable set. The obtained contradiction implies that for some $\gamma \in \Omega$, $x_\gamma = y$ and then (γ5) implies

$$d_a(Tx,Ty) \leq M'_a d_{j(a)}(x,y).$$

The last inequality is valid for arbitrary $M'_a > M_a$ and consequently

$$d_a(Tx,Ty) \leq M_a d_{j(a)}(x,y).$$

Theorem is thus proved.

Recommended for publication by Department of Mathematics, Faculty of Mining Electromechanics

REFERENCES

Weil A. 1938. Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale. Hermann, Paris.

Kelley J. L. 1959. General Topology. D. Van Nostrand Company, New York.

Isbell J. R. 1964. Uniform Spaces. AMS, Providence, RI.

Page W. 1978. Topological Uniform Structures. J. Wiley &Son, New York.

Angelov V., L. Georgiev. 1997. An extension of Kirk-Schöneberg theorem to uniform spaces. Discussiones Mathematical, Differential Includeusions, v.17, 89-96.

Angelov V. 1987. Fixed point theorems in uniform spaces and applications. Czechoslovak Math. J., v.37, 19-33.

Angelov V. 1989. Fixed points of densifying mappings in locally convex spaces and applications. J. Institute of Mathematics and Computer Sci. (Calcutta), v.2, N2, 22-39.

Angelov V. 2000. Escape trajectories of J.L. Synge equations. J. Nonlinear Analysis. Real World Applications. V.1, 189-204.

Kirk W. A., W. O. Ray. 1977. A note on Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Canad. Math. Bull. v.20 (4), 463-466.

Sierpinski W. 1965. Cardinal and Ordinal Numbers. Warszawa.